PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 12 — 15. Juni 1939 — Redaktionsschluß für Nr. 14 am 1. Juli 1939 — 40. Jahrgang

INHALT:

Abhandlungen:

R. Ritschl, Der Starkeffekt der Balmerlinien nach Durchgang der Atome durch ein sehr starkes elektrisches Feld. Mit Tafel X. S. 413.

K. Bennewitz u. H. Rötger, Über den plastisch-elastischen Zustand. S. 416.

P. O. Müller, Das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip für beliebige Dimensionszahl. S. 428.

Besprechungen:

K. Bechert und Chr. Gerthsen, Atomphysik. I. Allgemeine Grundlagen. II. Theorie des Atombaus. S. 435.

W. Blaschke, Ebene Kinematik. Eine Vorlesung (Hamburger Mathematische Einzelschriften, 25. Heft). S. 435.

B. Eistert, Tautomerie und Mesomerie. Sammlung chemischer und chemisch-technischer Vorträge, Heft 40. S. 436.

Nachtrag zum Vorlesungsverzeichnis für das Sommerhalbjahr 1939. S. 436.

Nachrichten. S. 436.

ABHANDLUNGEN

Der Starkeffekt der Balmerlinien nach Durchgang der Atome durch ein sehr starkes elektrisches Feld

Von Rudolf Ritschl

Mit Tafel X

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt

In einer vorhergehenden Arbeit von J. Stark und dem Verfasser[1]) wurde das in Abb. 1 (s. Tafel X) nochmals reproduzierte Spektrogramm veröffentlicht. Es war dadurch erhalten worden, daß ein abklingender Kanalstrahl zunächst durch ein elektrisches Querfeld von 470 kV/cm (Strecke a–b), unmittelbar anschließend durch ein schwächeres Querfeld der gleichen Feldrichtung von 270 kV/cm (Strecke b–c) und schließlich in einen feldfreien Raum lief. Die zuerst von Gebauer und Rausch v. Traubenberg[2]) beobachtete starke Schwächung der nach Rot verschobenen Starkeffektkomponenten der Linie H_β bei 470 kV/cm bewirkt, daß diese Komponenten von a ab auf dem Spektrogramm nicht mehr sichtbar sind. Die Verfasser haben dabei zum erstenmal darauf hingewiesen, daß, wie die Aufnahme zeigt, nach Absinken der Feldstärke auf einen Wert, bei dem ein normal angeregter Kanalstrahl die rot- und die violettverschobenen Komponenten in nahezu gleicher Intensität emittiert, jetzt nur noch die violettverschobenen Komponenten der Linie beobachtet werden. Das bedeutet, daß die Atome, die die rotverschobenen Komponenten emittieren, im starken Feld bei a ionisiert worden sind und daß der Kanalstrahl in seinem weiteren Verlauf auch im schwächeren Feld fast nur solche Atome enthält, die violettverschobene Komponenten emittieren.

Ich habe nun die Frage experimentell geprüft, wie sich das Aufspaltungsbild ändert, wenn der abklingende Kanalstrahl, dem in einem starken Feld die violette Komponenten emittierenden Atome entzogen sind, in ein Feld mit umgekehrter Feldrichtung eintritt. Die experimentelle Anordnung zeigt die Abb. 2. Sie bestand in zwei symmetrisch angeordneten Querfeldern von entgegengesetzter Kraftlinienrichtung. M, M sind geerdete Messingzylinder, an denen die Feldelektroden *2* und *3* sitzen. Durch Quarzzylinder Q isoliert sind die Elektroden E, E eingeführt, die auf negative Spannung gebracht sind und die Elektroden *1* und *4* tragen. Die Feldelektroden sind aus gehärtetem Stahl. Die Flächen der Elektroden *1* und *2* sind ein wenig abgeschrägt,

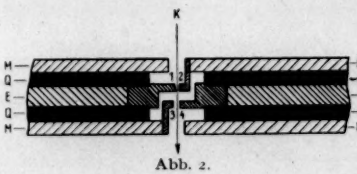


Abb. 2.

damit sie von dem vorbeistreifenden Kanalstrahl sauber gehalten werden. An der engsten Stelle haben sie einen Abstand von 0,2 mm; hier herrscht das zur Ionisation der die rotverschobenen Komponenten aussendenden Atome notwendige Feld. Die Elektroden *1* und *4* sind auf

1) J. Stark und R. Ritschl, Physik. Zeitschr. **39**, 517, 1938.

2) R. Gebauer und H. Rausch v. Traubenberg, Naturwiss. **18**, 417, 1930.

gleichem Potential; infolge des größeren Abstandes herrscht zwischen den Elektroden *3* und *4* ein schwächeres Feld von entgegengesetzter Richtung wie zwischen *1* und *2*.

Das mit dieser Feldanordnung erhaltene Resultat zeigt das in Abb. 3 (s. Tafel X) wiedergegebene Spektrogramm. Nach dem Durchgang des Kanalstrahls durch das starke Feld fehlen die rotverschobenen Komponenten von H_δ. Bei Wiederanstieg des Feldes mit entgegengesetzter Richtung werden wieder nur violettverschobene Komponenten beobachtet; die rotverschobenen Komponenten bleiben in ihrer Intensität nach wie vor unter die Empfindlichkeitsgrenze der Platte heruntergedrückt. Dies Resultat ist zu verstehen für diejenigen Atome, die nicht genau in der Symmetrieebene der Feldkondensatoren verlaufen. Nach den Vorstellungen von J. Stark[1]) werden die violettverschobenen Komponenten von Atomen emittiert, bei denen das Elektron auf der der Kathode zugewandten Seite des Atomkerns liegt (kathodische Komponenten). (Analog ist auch die quantentheoretische Auffassung; vgl. H. Bethe, Handbuch der Physik, 24/1, S. 298, 1933. Fig. 8.) Diese Einstellung der Atome ist auch der Grund dafür, daß die Zustände verminderter Energie im Starkeffekt, bei denen das Elektron auf der anodischen Seite liegt, leichter ionisiert werden als die Zustände erhöhter Energie.

Die außerhalb der Symmetrieebene verlaufenden Atome werden nun, wie Abb. 4 schematisch zeigt, von den schräg zum Kanalstrahl verlaufenden Kraftlinien allmählich herumgedreht, so daß sie bei Eintritt in den zweiten Feldkondensator wieder als kathodisch eingestellte Atome nur violettverschobene Komponenten emittieren. Diese Atome sind also für die im Spektrogramm Abb. 3 zu beobachtende Schwärzung verantwortlich.

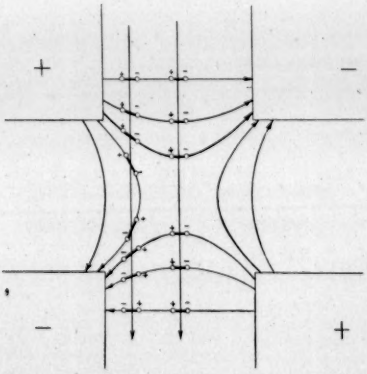


Abb. 4.

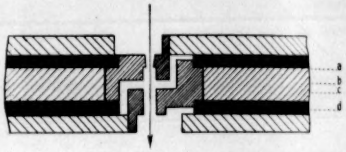


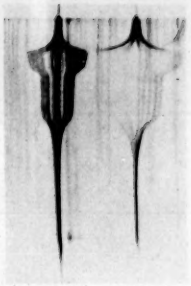
Abb. 5.

Man kann aber erwarten, worauf Herr Präsident Stark mich aufmerksam machte, daß die genau durch die Symmetrieebene verlaufenden Atome, die, wie Abb. 4 zeigt, nur genau senkrecht zum Kanalstrahl verlaufende Kraftlinien schneiden, ihre Einstellung bei der Feldumkehr beibehalten. Für diese Atome muß bei der Feldumkehr die Intensität von der violetten auf die rote Seite hinüberwechseln, da sie im zweiten Feldkondensator als anodisch eingestellte Atome verminderte Energie haben und daher rotverschobene Komponenten emittieren müssen. Die Aufnahme Abb. 3 zeigt, daß dies nur sehr wenige Atome sein können, da ihre Emission nicht zur Plattenschwärzung roter Komponenten ausgereicht hat.

Dagegen gelang es, das erwartete Hinüberwechseln der Intensität auf die rote Seite auf folgende Weise zu zeigen.

Die Feldanordnung zeigt die Abb. 5. Hinter dem starken ionisierenden Feld an der Stelle *a* durchläuft der Kanalstrahl zunächst ein schwächeres, homogenes Feld gleicher Richtung (*a*–*b*), dem dann ein gleiches mit umgekehrter Feldrichtung (*c*–*d*) folgt. Die Feldstärke wurde so gewählt, daß bei *a* die rotverschobenen Komponenten noch nicht ganz verschwinden, sondern gegenüber den violettverschobenen nur stark geschwächt sind. Dadurch erzielt man eine gewisse Vorbelichtung am Ort der rotverschobenen Komponenten. Die Aufnahme zeigt dann in der Tat eine deutliche Verstärkung dieser vor der Feldumkehr sehr schwachen rotverschobenen Komponenten. Dies zeigen die Photometerkurven in Abb. 6. Sie sind von einer Aufnahme der Linie H_α erhalten, erstens vor der Feldumkehr, zweitens nach der Feldumkehr. Die violette Komponente ist nach der Feldumkehr, hauptsächlich durch die natürliche Abklingung des Kanalstrahls, bereits geschwächt; die rotverschobene Komponente ist nach der Feldumkehr in ihrer absoluten Intensität verstärkt. Die beiden Photometerkurven sind unmittelbar nacheinander mit

1) Siehe J. Stark und R. Ritschl, a. a. O.



H_γ H_δ

Abb. 1

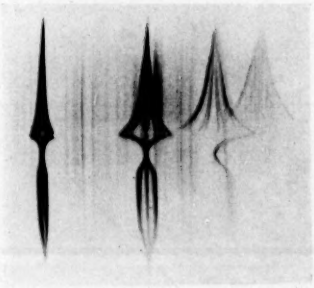


Abb. 3 H_δ

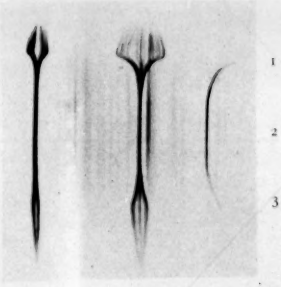


Abb. 8 H_δ

gleicher Empfindlichkeit des Registrierphotometers erhalten worden. Es ist das Intensitätsverhältnis nach der Feldumkehr sehr zugunsten

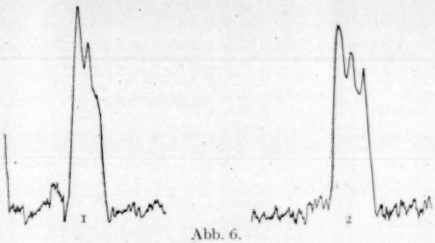


Abb. 6.

der rotverschobenen Komponente verändert. Als Gegenversuch wurden Aufnahmen bei gleicher Polung der beiden Feldkondensatoren gemacht, bei denen der beschriebene Effekt ausbleibt; es kann sich also auch nicht um Wiederanregung des Kanalstrahls durch Gasreste handeln. Die gleiche Erscheinung wurde bei H_β beobachtet. Es ist also erwiesen, daß ein kleiner Teil der Kanalstromatome, die vor der Feldumkehr nur violettverschobene Komponenten aussandten, nachher rotverschobene Komponenten emittiert, also seine Einstellung bei der Feldumkehr beibehalten hat.

Weiter habe ich die Frage geprüft, ob sich die Aussiebung desjenigen Teils der Kanalstrahlatome, die rotverschobene Komponenten emittieren, noch zu erkennen gibt, wenn der Kanalstrahl eine endlich lange feldfreie Strecke durchlaufen hat. Dazu diente die in Abb. 7 gezeichnete Feldanordnung. Die eine Elektrode ist ein massiver Eisenzylinder A, der sich auf Erdpotential befindet.

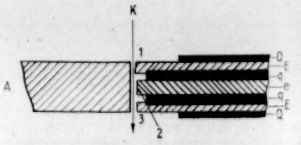


Abb. 7.

Ihm steht als Gegenelektrode der durch das Quarzrohr Q, Q isoliert eingeführte Eisenzylinder E, E gegenüber, der auf negative Spannung gebracht wird. Er ist durchbohrt und enthält in seinem Innern durch das Quarzrohr q, q isoliert gehalten die geerdete Elektrode e. Bei 1 herrscht das zur Ionisierung der rotverschoben emittierenden Atome notwendige elektrische Feld. Die Elektroden 2 und 3 haben etwas größeren Abstand von A. Die Kanalstrahlatome laufen also nach Durchsetzen des starken Feldes bei 1 durch einen völlig feldfreien Raum von fast 1 cm Länge zwischen 2 und A. Bei 3 steigt dann das Feld wieder auf einen – schwächeren – Wert an. Das Resultat dieses Versuches zeigt das Spektrogramm in Abb. 8 (s. Tafel X). Es ist deutlich zu sehen, daß bei Wiederanstieg des Feldes fast nur violettverschobene Komponenten emittiert werden.

Auf der feldfreien Strecke sind die Atome dem Zugriff des Feldes für eine endliche Zeit vollständig entzogen gewesen. Trotzdem sind nachher überwiegend Atome vorhanden, die violettverschobene Starkeffektkomponenten emittieren. Die angeregten Zustände des Wasserstoffatoms ohne Feld sind also zusammengesetzt und den Zuständen im Feld so zugeordnet, daß, wenn man im Feld einen Teil dieser Zustände vernichtet, auch der feldfreie Kanalstrahl die Fähigkeit zur Emission der entsprechenden Starkeffektkomponenten verliert[1]).

Zusammenfassung

1. Wird ein Wasserstoffkanalstrahl durch ein so hohes elektrisches Querfeld geschickt, daß bei einer bestimmten Wasserstofflinie die rotverschobenen Starkeffektkomponenten durch Ionisation verschwinden, so beobachtet man, wie schon früher festgestellt wurde, bei Absinken des Feldes längs des Kanalstrahls nur violettverschobene Komponenten.
2. Kehrt man nach Durchlaufen des ionisierenden Feldes in einem zweiten Feldkondensator die Feldrichtung um, so erscheinen mit großer Intensität ebenfalls nur violettverschobene Komponenten im zweiten Feldraum. Für einen Teil der Kanalstrahlatome wechselt aber die Emissionsintensität nach der Feldumkehr auf die Seite der rotverschobenen Komponenten hinüber. Diese Emission entspricht vermutlich denjenigen Atomen, die genau durch die Symmetrieebene des Feldes gelaufen sind und ihre Einstellung beibehalten haben.
3. Durchläuft der Kanalstrahl nach dem starken ionisierenden Feld eine endlich lange (1 cm) feldfreie Strecke, so emittieren die Atome bei darauffolgendem Wiederanstieg des Feldes wieder nur violettverschobene Komponenten.

1) Über die Zuordnung von Feinstruktur- zu Starkeffektniveaus von Wasserstoff s. z. B. R. Schlapp, Proc. Roy. Soc. London (A.) **119**, 313, 1928.

Berlin-Charlottenburg, 18. April 1939.

(Eingegangen 6. Mai 1939)

Über den plastisch-elastischen Zustand

Von K. Bennewitz und H. Rötger

Einleitung

In einer früheren Arbeit[1]) war der Versuch gemacht worden, die mechanische Dämpfung in einem Festkörper durch Ausgleichsvorgänge darzustellen. Als Objekt des Ausgleiches kam

1. die Energie (Wärmeleitung) und
2. die Materie (Diffusion)

in Betracht. Der erste Fall ist dann weiterhin[2]) ausführlich behandelt und in Übereinstimmung mit den Messungen gefunden worden.

Der zweite Fall, Diffusion, soll nunmehr in ganz allgemeiner Form behandelt werden, um das Gebiet der Flüssigkeit mit zu umfassen. War bisher ein starres Gerüst mit einer eingebetteten „Fließsubstanz" (thermische Fehlordnung, Kristallitgrenzen oder Fremdsubstanz) zugrunde gelegt worden, so wird nunmehr auch dem Gerüst die Starrheit genommen. Erst dadurch wird der Übergang zur Plastizität möglich, und es zeigt sich, daß diese Erweiterung auch sinnvoll ist, ohne daß wir in unserer Vorstellung etwas zu ändern haben.

Die Zurückführung der Nachwirkungserscheinungen auf Ausgleichsvorgänge ist an sich nicht neu, sondern schon von Boltzmann und insbesondere E. Wiechert[3]) durchgeführt worden. Des letzteren Theorie steht mit der unseren in engem Zusammenhange, ist aber keineswegs identisch, und zwar aus zwei Gründen. Erstens sind die Betrachtungen Wiecherts auf Nachwirkung im engeren Sinne abgestellt und liefern nur dann einfache Resultate, wenn die Deformationen, nicht aber wenn die Kräfte vorgegeben sind. Das hängt damit zusammen, daß Wiechert die Aufgabe als ein Integralproblem auffaßt, hier dagegen die Differentialgleichung in den Vordergrund tritt. Dieser Unterschied ist also ursprünglich formeller Art, führt aber zu ganz anderen Fragestellungen. Während für Wiechert die Boltzmannsche „Erinnerungsfunktion" der Nachwirkung das Entscheidende ist, tritt bei uns die Frage nach dem Energieverlust, der Dämpfung und der Absorption als das auch experimentell wichtigste Moment an die Spitze. Zweitens besteht aber ein durchgreifender Unterschied darin, daß Wiechert die elastischen Erscheinungen in einen katastatischen (zeitlosen) und einen epibolischen (zeitlichen) Teil zerlegt, wodurch er sich im Gegensatz zu uns auf den eigentlich „festen" Körper beschränkt. Das wird aus folgendem klar.

Der Körper bestehe aus n „Sorten" von Bausteinen, die sich durch ihre elastischen (α) wie plastischen (γ) Eigenschaften unterscheiden. Begrifflich sind die α_j Direktionskräfte und die γ_j Relaxationsgeschwindigkeiten. Wir denken uns die γ nach ihrer Größe geordnet: $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 \ldots$; die kleinste Geschwindigkeit γ_1 entspricht dem, was in Arbeit I als „Gerüst" bezeichnet wurde, wobei sie dann gleich Null gesetzt war.

Diese Bedingung $\gamma_1 = 0$ entspricht aber auch genau dem, was Wiechert als „katastatischen" Anteil bezeichnet. Diese Einschränkung lassen wir hier nun fallen, wodurch der Gegensatz „fest–flüssig" überbrückt und zu einem quantitativen Unterschied wird; die Wiechertsche Theorie bildet somit einen Grenzfall der unseren.

Die sich ergebende Bewegungsgleichung für eine Deformation lautet, wenn zugleich eine äußere Kraft K_a wirkt,

$$m\ddot{y} + \sum^{n} K_j = K_a \,, \tag{1}$$

wobei die K_j die von der $j$ten Sorte hervorgerufenen elastischen Kräfte bedeuten. Diese hängen ihrerseits ab:

1. von der Deformation:

$$\left(\frac{\partial K_j}{\partial y}\right)_t = \alpha_j \,, \tag{2}$$

2. von der Zeit:

$$\left(\frac{\partial K_j}{\partial t}\right)_y = -\gamma_j K_j \,. \tag{3}$$

Gleichung (2) bedeutet Hookesches Gesetz, Gleichung (3) stationären Diffusionsvorgang. Beide lassen sich vereinigen zu dem System von n Differentialgleichungen:

$$dK_j = \alpha_j dy - \gamma_j K_j dt$$

oder

$$\dot{K}_j = \alpha_j \dot{y} - \gamma_j K_j \,. \tag{4}$$

Dieses System bildet die einzige Grundlage alles folgenden, während bei Wiechert neben Gleichung (4) noch eine „katastatische" Gleichung auftritt.

Gemäß den praktisch vorkommenden Anwendungen behandeln wir die vier Fälle:

1. Konstante äußere Kraft ohne Berücksichtigung der Trägheit.
2. Freie Abklingung einer Schwingung.
3. Konstante äußere Kraft mit Berücksichtigung der Trägheit.
4. Erzwungene Schwingung.

1) K. Bennewitz und H. Rötger, Physik. Zeitschr. **37**, 578, 1936 (als Arbeit I zitiert).
2) K. Bennewitz und H. Rötger, Physik. Zeitschr. **39**, 835, 1938.
3) E. Wiechert, Ann. d. Phys. u. Chem. **50**, 335, 1893.

Die Verschmelzung der Begriffe fest–flüssig führt dazu, daß bei uns auch die reine Flüssigkeit einen Torsions- (Elastizitäts-) Modul besitzt, der auf Grund der Theorie angebbar und experimentell bestimmbar wird und in enge Beziehung zur inneren Reibung tritt. Dadurch wird ein Gebiet angeschnitten, das durch die Debyeschen Röntgenuntersuchungen an Flüssigkeiten neuerdings in den Vordergrund getreten ist.

Bestätigungen der Theorie, soweit sie bisher vorliegen, werden am Schluß kurz betrachtet.

Weiter erlaubt die Einführung von η- und γ-Größen in Verbindung mit dem Torsionsmodul eine sachliche Klassifizierung der Zustände auf dem Übergangsgebiet fest–flüssig.

I. Konstante äußere Kraft ohne Berücksichtigung der Trägheitskraft

Auf den ausgeruhten Körper wirke vom Zeitpunkt $t = 0$ eine konstante äußere Kraft $K_n = G$. Die Trägheitskraft $m\ddot{y}$ sei dabei unterdrückt. Versuche dieser Art lassen sich bei „festen Stoffen" durchführen. Aus Gleichung (1) folgt dann:

$$\sum_j^n \alpha_j \left[y^{(n)} + \sum \gamma_k \cdot y^{(n-1)} + \sum \gamma_k \gamma_l \cdot y^{(n-2)} \cdots + \gamma_k \gamma_l \cdots y^{(1)} \right] = \prod_j \gamma_j \cdot G \,, \tag{8}$$

wobei die $k, l \ldots$ sämtliche Indizes außer $_j$ durchlaufen.

Wir setzen (9) $\dot{y} = z + A$; dann wird:

$$\sum_j^n \alpha_j \left[z^{(n-1)} + \sum \gamma_k \cdot z^{(n-2)} + \sum \gamma_k \gamma_l \cdot z^{(n-3)} \cdots + \gamma_k \gamma_l \cdots z \right] = 0 \,, \tag{10}$$

wenn

$$A = \sum_j^n \alpha_j \cdot \gamma_k \gamma_l \cdots \gamma_n = \prod_j \gamma_j \cdot G \,,$$

oder

$$A = \frac{1}{\sum_j^n \frac{\alpha_j}{\gamma_j}} \cdot G \tag{11}$$

gesetzt wird. — Die Lösung von Gleichung (10) laute:

$$z = \text{const}\, e^{xt} \,; \tag{12}$$

damit wird Gleichung (10):

$$\sum_j^n \alpha_j \left[x^{n-1} + \sum \gamma_k x^{n-2} + \sum \gamma_k \gamma_l \cdot x^{n-3} + \cdots \gamma_k \gamma_l \cdots \right] = 0 \,. \tag{13}$$

Das Polynom läßt sich schreiben:

$$\sum_j^n \left\{ \alpha_j \prod_k (\gamma_k + x) \right\} = 0 \,. \tag{14}$$

Durch Division mit $\prod_k (\gamma_k + x)$ wird das

$$\sum_j^n \frac{\alpha_j}{\gamma_j + x} = 0 \,. \tag{15}$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung $(n-1)$ten Grades für x, für das also $(n-1)$ Werte folgen, die sämtlich reell und negativ sein müssen, wie wir beweisen wollen. Zuerst läßt sich Gleichung (15) durch $\sum_j^n \alpha_j$ dividieren; führen wir dabei

$$\frac{\alpha_j}{\sum_j^n \alpha_j} = \eta_j \tag{16a}$$

Hieraus sind mit Hilfe des Systems (4) sämtliche K_j zu eliminieren. Zu dem Zweck bilden wir aus Gleichung (5) die n abgeleiteten Beziehungen:

$$\sum_j^n \dot{K}_j = 0 \,; \quad \ldots \,; \quad \sum_j^n K_j^{(n)} = 0 \,; \tag{6}$$

ebenso aus Gleichung (4) die folgenden Abgeleiteten bis zur n-ten:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{K}_j &= \alpha_j \dddot{y} - \gamma_j \ddot{K}_j \,; \quad \ldots \,; \\ K_j^{(n)} &= \alpha_j y^{(n)} - \gamma_j K_j^{(n-1)} \,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Mit Gleichung (4) zusammen erhalten wir dann weitere n^2-Gleichungen, mit Gleichung (5) und (6) also insgesamt $(1 + n + n^2)$. Zu eliminieren sind die

$$K_1 K_2 \cdots K_n \,; \quad \dot{K}_1 \dot{K}_2 \cdots \dot{K}_n \,; \quad \ldots \,; \quad K_1^{(n)} \cdots K_n^{(n)} \,;$$

also insgesamt $(n+1)n$, oder $n + n^2$-Größen, was mit obigen Gleichungen gerade gelingt.

Das Ergebnis dieser Elimination ist die Gleichung n. Ordnung:

ein, mit

$$\sum_{j}^{n} \eta_j = 1 , \tag{16b}$$

so wird aus Gleichung (15):

$$\sum_{j}^{n} \frac{\eta_j}{\gamma_j + x} = 0 . \tag{17}$$

Nehmen wir aus dieser Summe η_n heraus und drücken dieses nach Gleichung (16b) durch $\eta_n = 1 - \sum_{j}^{n-1} \eta_j$ aus, so verwandelt sich die Gleichung (17) in

$$\sum_{j}^{n-1} \frac{\eta_j(\gamma_n - \gamma_j)}{\gamma_j + x} + 1 = 0 . \tag{18}$$

Wir setzen nun weiter:

$$\eta_j(\gamma_n - \gamma_j) = \varrho_j ; \tag{19}$$

wegen der früheren Normierung der γ_j sind aber alle $\varrho_j > 0$. Gleichung (18) wird nun:

$$\sum_{j}^{n-1} \frac{\varrho_j}{\gamma_j + x} + 1 = 0 . \tag{20}$$

Wäre nun x komplex, so könnten wir ansetzen: $x = a + ib$, worin a und b positiv oder negativ sein können. Nach Reellmachung des Nenners folgt:

$$\sum_{j}^{n-1} \frac{\varrho_j(\gamma_j + a - ib)}{(\gamma_j + a)^2 + b^2} + 1 = 0 . \tag{21}$$

Nach Zerspaltung in reell und imaginär folgen die zwei Bedingungen:

$$\sum_{j}^{n-1} \frac{\varrho_j(\gamma_j + a)}{(\gamma_j + a)^2 + b^2} + 1 = 0 \tag{22a}$$

und

$$\sum_{j}^{n-1} \frac{\varrho_j \cdot b}{(\gamma_j + a)^2 + b^2} = 0 . \tag{22b}$$

Gleichung (22b) ist aber nur für $b = 0$ erfüllbar; also ist x reell. Ebenso kann Gleichung (22a) nur durch ein negatives a erfüllt werden; also ist x negativ. Wir bezeichnen deshalb die $(n-1)$ Lösungen für x_j mit $-q_j$ (q positiv), woraus die Lösung von Gleichung (10) mit (12) übergeht in:

$$z = \sum_{j}^{n-1} C_j e^{-q_j t} . \tag{23}$$

Die Bestimmung der C_j aus den Anfangsbedingungen z_0, $\dot{z}_0$ usw. unter Benutzung der Gleichung (9), (4) und (5) ist zwar in jedem Falle möglich. Da jedoch hierbei die q_j explizit bekannt sein müssen, was bei Gleichungen höheren Grades nicht der Fall zu sein braucht, sehen wir von der allgemeinen Bestimmung dieser Konstanten ab und beschränken uns auf die später zu behandelnden Spezialfälle.

Zur Bestimmung des y führen wir Gleichung (23) in Gleichung (9) ein:

$$\dot{y} = \sum_{j}^{n-1} C_j \cdot e^{-q_j t} + A . \tag{24}$$

Die Integration zwischen den Grenzen 0 und t liefert:

$$y = y_0 + \sum_{j}^{n-1} \frac{C_j}{q_j} [1 - e^{-q_j t}] + At . \tag{25}$$

Hierin bedeutet offenbar y_0 die Initialdeformation, die sich infolge der Unterdrückung der Trägheitskraft $m\ddot{y}$ in Gleichung (5) als zeitlos erweist. Sie hängt demgemäß nur von der Summe der Direktionskräfte α_j, nicht aber von den γ_j ab und beträgt [nach Gleichung (2) und (5)]

$$y_0 = \frac{G}{\sum_{j}^{n} \alpha_j} = \frac{F}{E} G , \tag{26}$$

wenn wir einen Formfaktor F[1]) und einen „momentanen" Elastizitätsmodul E einführen. Der so definierte Modul E unterscheidet sich von dem üblichen, der streng genommen nur im Grenzfall völliger Nichtplastizität sinnvoll ist, dadurch, daß er in jedem Falle eindeutig und meßbar ist, wie wir zeigen werden.

Die bei der Bestimmung der C_j benötigten K_j zur Zeit $t = 0$ sind ebenfalls nur von den α_j abhängig; wir dürfen sie gemäß Gleichung (2) und (26) setzen:

$$K_{j0} = \alpha_j \cdot y_0 = \frac{\alpha_j}{\sum \alpha_j} G = \eta_j G . \tag{27}$$

In gleicher Weise enthalten auch sämtliche Abgeleitete $K^{(i)}_{j0}$ und somit die Konstanten C_j den Faktor $\frac{G}{\sum \alpha_j}$.

Wir schreiben also

$$\frac{C_j}{q_j} = s_j \frac{G}{\sum \alpha_j} . \tag{28}$$

Gleichung (25) wird nunmehr mit Gleichung (26) (28) und (11):

$$y = \frac{G}{\sum \alpha_j} \left[1 + \sum_{j}^{n-1} s_j (1 - e^{-q_j t}) + rt \right] , \tag{29}$$

worin

$$r = \frac{\sum \alpha_j}{\sum \frac{\alpha_j}{\gamma_j}} = \frac{1}{\sum \frac{\eta_j}{\gamma_j}}$$

1) Dieser ist beispielsweise bei Dehnung eines Stabes vom Querschnitt q und der Länge L: $F = \frac{L}{q}$.

bedeutet. Gleichung (29) stellt die allgemeine Lösung der Deformation eines Körpers bei zur Zeit $t = 0$ einsetzender konstanter Kraft dar. Die Gleichung zerfällt in drei Summanden, die der Reihe nach den elastischen, den Nachwirkungs- und den plastischen Anteil darstellen. Es ist das unseres Wissens die erste theoretisch konsequente Darstellung, die ohne weiteres zum dritten Glied stationären Fließens führt. Wie die s_j und q_j auf die Materialkonstanten zurückzuführen sind, soll an den folgenden wichtigsten Beispielen für $n = 1$ und $n = 2$ gezeigt werden.

Beispiel konstanter äußerer Kraft für $n = 2$ ($n = 1$) Sorten

Fall $n = 2$. Als Materialkonstanten haben wir die Verteilungszahlen $\eta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$ und $\eta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, weiter die zugehörigen Relaxationsgeschwindigkeiten γ_1 und γ_2. In Gleichung (29) wird damit

$$r = \frac{1}{\frac{\eta_1}{\gamma_1} + \frac{\eta_2}{\gamma_2}}; \qquad (30)$$

q_j, das wegen der Summation bis $n - 1$ hier nur einen Wert q darstellt, folgt aus Gleichung (17) mit $x = -q$ und Gleichung (16b):

$$q = \eta_1\gamma_2 + \eta_2\gamma_1. \qquad (31)$$

Zur Bestimmung von s (ebenfalls einwertig) gibt Gleichung (28): $s = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{G \cdot q} \cdot C$; hierin ist nach Gleichung (23) $C = z_0$. z_0 wieder ist aus Gleichung (9) zu entnehmen: $z_0 = \dot{y}_0 - A$, und A folgt aus Gleichung (11) zu $A = \frac{1}{\frac{\alpha_1}{\gamma_1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2}} \cdot G$, oder mit Gleichung (16a): $A = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot \frac{1}{\frac{\eta_1}{\gamma_1} + \frac{\eta_2}{\gamma_2}} G$.

Nunmehr bleibt noch $\dot{y}_0$ zu ermitteln.

Durch Vereinigung von Gleichung (6) und Gleichung (4) folgt:

$$\dot{K}_1 + \dot{K}_2 = 0 = (\alpha_1 + \alpha_2)\dot{y} - \gamma_1 K_1 - \gamma_2 K_2;$$

für $t = 0$ wird das mit Gleichung (27):

$$\dot{y}_0 = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}(\eta_1\gamma_1 + \eta_2\gamma_2)G.$$

Durch Zusammenfassung alles dieses ergibt sich:

$$s = \frac{1}{\eta_1\gamma_2 + \eta_2\gamma_1}\left[\eta_1\gamma_1 + \eta_2\gamma_2 - \frac{\gamma_1\gamma_2}{\eta_1\gamma_2 + \eta_2\gamma_1}\right],$$

das wegen Gleichung (16b) übergeht in:

$$s = \frac{\eta_1\eta_2(\gamma_2 - \gamma_1)^2}{(\eta_1\gamma_2 + \eta_2\gamma_1)^2}. \qquad (32)$$

Damit wird Gleichung (29) für den Fall $n = 2$:

$$y = \frac{G}{\alpha_1 + \alpha_2}\left[1 + \frac{\eta_1\eta_2(\gamma_2 - \gamma_1)^2}{(\eta_1\gamma_2 + \eta_2\gamma_1)^2}(1 - e^{-(\eta_1\gamma_2 + \eta_2\gamma_1)t}) + \frac{\gamma_1\gamma_2}{\eta_1\gamma_2 + \eta_2\gamma_1} \cdot t\right], \qquad (33)$$

worin noch $\eta_{j1} = 1 - \eta_{j2}$ gesetzt werden kann.

Dieses Ergebnis deckt sich formal mit der von Taylor, McNamara und Sherman[1]) erhaltenen rein empirischen Formel

$$y = y_0[1 + s(1 - e^{-qt}) + rt], \qquad (33a)$$

die auf Grund zahlreicher Versuche an Glas[2]) gut bestätigt wurde; nur haben bei uns die Meßgrößen y_0, s, q und r eine greifbare physikalische Bedeutung erhalten. Die Belastungskurve hat den Charakter[3]) von Fig. 1; direkte Meßgrößen sind y_0, y_N; $\operatorname{tg}\varphi$; $\operatorname{tg}\chi$. Dann folgt aus der Fig. 1

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{y_N}{y_0}; & q &= \frac{1}{y_N}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\chi); \\ r &= \frac{1}{y_0}\operatorname{tg}\chi; & \alpha_1 + \alpha_2 &= \frac{G}{y_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

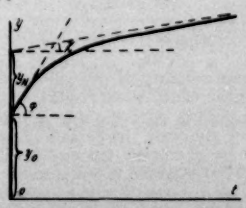


Fig. 1. Trägheitslose Deformation bei konstanter Kraft für 2 „Sorten" (γ_1, γ_2 endlich).

1) N. W. Taylor, E. P. McNamara und J. Sherman, Journ. Soc. Glass. Techn. 21 (83), 61–81, 1937.

2) N. W. Taylor und P. S. Dear, Journ. Amer. Ceram. Soc. **20**, 296, 1937.

3) Solche Kurven wurden beispielsweise auch von E. Jenkel und R. Überreiter, Zeitschr. f. phys. Chem. (A) **182**, 374, 1938 gefunden.

Daraus ergeben sich die Materialkonstanten γ_1, γ_2, η_1, η_2 und E:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2,\ \gamma_1 &= \tfrac{1}{2}(q+r+s\cdot q) \\ &\quad \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(q+r+sq)^2 - rq}\,; \\ \eta_{i2} &= \frac{\gamma_2 - q}{\gamma_2 - \gamma_1}\,; \qquad \eta_{i1} = \frac{q-\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}\,; \\ E &= F(\alpha_1+\alpha_2)\,. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Der „momentane" Elastizitätsmodul E ist also $\frac{F\cdot G}{y_0}$, nicht $\frac{FG}{y_0+y_N}$, wie er neuerdings z. B. von Jenkel und Überreiter benutzt wird.

Dieser Fall entspricht einem plastischen Festkörper mit Nachwirkung; setzt man hierin $\gamma_1 = 0$ bei endlichem η_{i1}, so gelangt man grundsätzlich zum nichtplastischen Festkörper mit Nachwirkung, wie er in Arbeit I behandelt

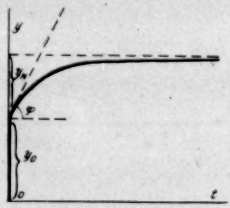


Fig. 2. Trägheitslose Deformation bei konstanter Kraft für 2 „Sorten" ($\gamma_1 = 0$).

wurde. Dieser stellt einen Grenzfall dar (Fig. 2). Es gilt:

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{y_N}{y_0}\,; \qquad q = \frac{1}{y_N}\operatorname{tg}\varphi\,; \\ r &= 0\,; \quad \alpha_1+\alpha_2 = \frac{G}{y_0}\,. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Und weiter

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2 &= q(s+1)\,; \qquad \gamma_1 = 0\,; \\ \eta_{i2} &= \frac{s}{s+1}\,; \qquad \eta_{i1} = \frac{1}{s+1}\,; \\ E &= F(\alpha_1+\alpha_2)\,. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

An Stelle der etwas unsicheren Messung des Grenzwinkels φ kann man natürlich einen Zwischenpunkt der Kurve benutzen.

Fall $n = 1$. Dieser wird aus Fall $n = 2$ erhalten, wenn in Gleichung (33) $\eta_{i2} = 0$, also $\eta_{i1} = 1$ gesetzt wird. Also

$$y = \frac{G}{\alpha_1}[1+\gamma_1 t]\,. \quad (38)$$

Der Nachwirkungsteil ist hier verschwunden und es wird einfach

$$\gamma_1 = r = \frac{1}{y_0}\operatorname{tg}\chi\,. \quad (39)$$

In diesem Fall liegt ein plastischer, nachwirkungsfreier Körper vor; er entspricht der Fig. 3.

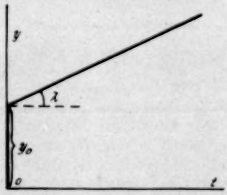


Fig. 3. Trägheitslose Deformation bei konstanter Kraft für 1 „Sorte".

II. Freie Abklingung einer Schwingung

Hier wirkt eine äußere Kraft $K_a = 0$; dagegen ist die Trägheitskraft $m\ddot{y}$ zu berücksichtigen. Also wird aus Gleichung (1):

$$m\ddot{y} + \sum^{n} K_j = 0\,. \quad (40)$$

Verfahren wir hier wieder genau so wie in Abschnitt I, bilden also die n Abgeleiteten von Gleichung (40) und eliminieren die $(n+n^2)$-Größen $K_1 \ldots K_n^{(n)}$, so lautet das Ergebnis nach Division durch m nunmehr:

$$\left.\begin{aligned} &y^{(n+2)} + \sum\gamma_j \cdot y^{(n+1)} + \sum\gamma_j\gamma_k \cdot y^{(n)} + \cdots + \gamma_j\gamma_k \cdots \gamma_n \cdot y^{(2)} \\ &\quad + \sum_j \frac{\alpha_j}{m}\left[y^{(n)} + \sum\gamma_k \cdot y^{(n-1)} + \sum\gamma_k\gamma_l \cdot y^{(n-2)} \cdots + \gamma_k\gamma_l \cdots \gamma_n y^{(1)}\right] \end{aligned}\right\} = 0\,. \quad (41)$$

Die Lösung von Gleichung (41) laute:

$$y = \text{const}\, e^{xt}\,; \quad (42)$$

damit wird Gleichung (41):

$$x^{n+2} + \sum\gamma_j x^{n+1} \cdots + \gamma_j\gamma_k \cdots \gamma_n \cdot x^2 + \sum_j \frac{\alpha_j}{m}\left[x^n + \sum\gamma_k \cdot x^{n-1} + \cdots + \gamma_k\gamma_l \cdots \gamma_n \cdot x\right] = 0$$

Dies läßt sich schreiben:

$$x^n \prod_j (\gamma_j + x) + x \sum_j \left[\begin{matrix} \alpha_j \\ m \end{matrix} \cdot \prod_k (\gamma_k + x) \right] = 0 , \quad (43)$$

wobei die k sämtliche Indizes außer j durchlaufen. Gleichung (43) läßt sich umformen in:

$$\sum_j^n \frac{\alpha_j}{\gamma_j + x} = - mx . \quad (44)$$

Diese Bestimmungsgleichung für x ist im Gegensatz zu Gleichung (15) $(n+1)$-Grades. Sie hat die Eigentümlichkeit, daß unter ihren $(n+1)$ Werten höchstens ein konjugiert komplexes Paar auftreten kann; der Beweis hierfür erfolgt am einfachsten graphisch: Zuerst dividieren wir Gleichung (44) noch durch $\sum^n \alpha_j$ und führen ein:

$$\frac{\sum^n \alpha_j}{m} = \omega^2 , \quad (45)$$

wobei ω die „ungedämpfte" Eigenfrequenz des Körpers ist. Weiter ersieht man aus Gleichung (44), daß ihre reellen Lösungen nur negativ sein können; also ersetzen wir x wieder durch $-q$. Damit und mit Gleichung (16a) ergibt sich:

$$\sum_j^n \frac{\eta_j}{\gamma_j - q} = \frac{q}{\omega^2} . \quad (46)$$

Die linke Seite stellen wir als Funktion von q dar (Fig. 4). Für $q = 0$ wird $f(q) = \sum_j^n \frac{\eta_j}{\gamma_j} > 0$. Bis auf die Stellen $q = \gamma_j$ steigt $f(q)$ überall monoton an, um an diesen Stellen jedesmal von $+\infty$ auf $-\infty$ überzugehen. Die positive Halbebene von q wird also durch $q = \gamma_j$ in Streifen zerlegt, in denen $f(q)$ jeweilig von $-\infty$ bis $+\infty$ monoton ansteigt. Legen wir die positive Gerade $\frac{q}{\omega^2}$ hindurch, so werden die Schnittpunkte die reellen Lösungen von $f(q) = \frac{q}{\omega^2}$ darstellen. Da an solchen Schnittpunkten aber nicht weniger als $n-1$ vorhanden sind, können von den $(n+1)q_j$-Werten höchstens 2 (konjugiert) komplex sein. Der Fall, daß alle $(n+1)q_j$-Werte reell werden, tritt ein, entweder wenn der $f(q)$-Ast im Streifen 0 bis γ_1 geschnitten wird (kleines ω), oder wenn einer der übrigen Äste dreimal geschnitten wird, was von der Wahl der η_j und γ_j abhängt. sich aber nur für $f(q) > 0$ ereignen kann.

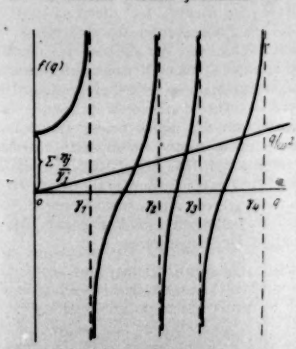


Fig. 4. Darstellung von $\sum \frac{\eta_j}{\gamma_j - q} = f(q)$.

Zusammenfassend: Die Lösung (42)

$$y = \sum_1^{n+1} C_l e^{-q_l t} \quad (47)$$

enthält mindestens $(n-1)$ aperiodische Glieder und höchstens ein gedämpft periodisches Gliederpaar. Für hinreichend großes ω ist y immer periodisch; mit abnehmendem ω kann es vorübergehend aperiodisch werden, um schließlich bei hinreichend kleinem ω endgültig aperiodisch zu werden. Nur der Grenzfall $\gamma_1 = 0$ (nichtplastischer Körper) würde letzteres verhindern.

Für die reellen q_l lehrt Fig. 4 im periodischen Fall die Beziehung:

$$\gamma_1 < q_1 < \gamma_2 < q_2 < \gamma_3 \cdots < \gamma_{n-1} < q_{n-1} < \gamma_n . \quad (48)$$

Ist nun der reelle Teil $\Re(q_n) = \Re(q_{n+1})$ des komplexen Paares klein gegen q_1, so werden nach hinreichend langer Zeit die aperiodischen Einschwinglieder abgeklungen sein und es verbleibt ein eingliedriger Ausdruck mit reinem (also konstantem) Dekrement. Verfährt man bei der Dekrementsbestimmung so, daß man beide Umkehrpunkte berücksichtigt, mißt also:

$$\left. \begin{aligned} y_{\text{corr}} &= y - \sum_1^{n-1} C_l e^{-q_l t} \\ &= \text{const}\, e^{-\Re(q_n) t} \cos\left[I(q_n) t \right] , \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

so wird man in allen Fällen ein reines Dekrement finden. Die Theorie in der vorliegenden Form vermag also selbst bei großem n weder ein unreines Dekrement, noch eine Frequenzabhängigkeit von der Amplitude zu erklären. Diese ergeben sich erst entweder bei Ungültigkeit des Hookeschen Gesetzes, oder bei Abhängigkeit der γ oder η von der Amplitude, was durchaus verständlich wäre.

Die wichtigste Meßgröße bei freier Abklingung ist das logarithmische Dekrement $\lambda = \lg \frac{y_0}{y_1}$, das sich nach obigem aus $q_n = a + ib$ ergibt zu:

$$\lambda = \frac{2\pi}{M} \cdot \frac{a}{b}. \tag{50}$$

Bei Anwesenheit nur einer „Sorte" (also $n = 1$) liefert Gleichung (46) (mit $\eta_j = 1$)

$$q_{1,2} = \frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\,; \tag{51}$$

Gleichung (47) lautet dann einfach:

$$y = y_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\left[\sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\, t + \delta\right], \tag{52}$$

und für λ ergibt sich aus Gleichung (50):

$$\lambda = \frac{\pi}{M} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} = \frac{\pi}{M} \frac{\gamma}{\Omega}\,; \tag{53}$$

also ist γ auf das Dekrement λ und die gemessene Frequenz Ω zurückgeführt.

Bei zwei „Sorten" ($n = 2$) ist die allgemeine Lösung sehr verwickelt und soll hier nicht angegeben werden. Unter der speziellen Voraussetzung, daß $\eta_1 \gg \eta_2$, erhält man noch brauchbare Beziehungen, die für Metalle und überhaupt Festkörper von Bedeutung sind.

a) Nimmt man überdies $\gamma_1 = 0$, d. h. die Existenz eines starren Gerüstes an, so folgt, wie hier nicht weiter gezeigt zu werden braucht, die Gleichung (9) der Arbeit I, die in der jetzigen Schreibweise so lautet:

$$y = A e^{-\gamma_2(1-2D)t} + B e^{-\gamma_2 Dt} \cos\left[\omega\left(1 - D\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2\right)t + \varphi\right], \tag{54}$$

wo

$$D = \frac{1}{2\left(1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2\right)} \eta_2 .$$

Das ω ist im Gegensatz zu dem ω_0 der Arbeit I, die von beiden Sorten herrührende, ungedämpfte Frequenz, woher sich der Unterschied, insbesondere im Frequenzglied, erklärt. Das Dekrement λ lautet:

$$\lambda = \frac{\pi}{M} \frac{\eta_2}{\frac{\Omega}{\gamma_2} + \frac{\gamma_2}{\Omega}}, \tag{55}$$

worin $\omega \approx \Omega$ (gemessen) gesetzt wurde.

b) Ist dagegen γ_1 beliebig, so nehmen Gleichung (54) und (55) so verwickelte Formen an, daß sie für die Bestimmung der γ_1, γ_2 und η_2 streng nicht brauchbar sind. In hinreichender Näherung kann man jedoch eine für nicht zu großes γ_1 ableitbare Beziehung benutzen, die sich als Addition von Gleichung (53) und (55) erweist, nämlich:

$$\lambda = \frac{\pi}{M}\left[\frac{\gamma_1}{\Omega} + \frac{\eta_2}{\frac{\Omega}{\gamma_2} + \frac{\gamma_2}{\Omega}}\right], \tag{56}$$

Weitere „Sorten" rufen zusätzliche Glieder nach Art des letzten hervor; dabei ist Voraussetzung, daß $\eta_2 + \eta_3 + \ldots \ll 1$, d. h. daß das „Gerüst" überwiegt.

Eigene orientierende Versuche an Glas, insbesondere auch bei höheren Temperaturen, machen die Existenz solcher überlagerten Funktionen sehr wahrscheinlich, wobei sichergestellt wurde, daß es sich bei diesen Effekten nicht um thermische Dämpfung, sondern um materielle Diffusion handelt.

III. Konstante äußere Kraft mit Berücksichtigung der Trägheitskraft

Die in diesem Abschnitt behandelte Fragestellung erweist sich, im Gegensatz zu Abschnitt I, als wichtig für die Erfassung der eigentlichen Flüssigkeiten, die eine eigene Meßmethodik erfordern. Wir denken uns eine feste Kugel in einem flüssigen Medium unter laminaren Bedingungen frei fallend; neben dem (reduzierten) Gewicht G wirken dann auf die Kugel Reibungskräfte K_j, die sich nach Gleichung (4) in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufspalten lassen. Diese Aufspaltung wird aber erst dadurch möglich, daß man nicht nur das Gebiet konstanter Fallgeschwindigkeit, d. h. die Viskosität, heranzieht, sondern gerade das Beschleunigungsgebiet untersucht[1]).

1) Hierüber siehe z. B. J. Weyßenhoff: Ann. d. Phys. **62**, 1, 1920, wo auch weitere Literatur angegeben. Die theoretischen Grundlagen sind hier anderer Art als bei uns. Versuche liegen vor z. B. bei F. S. Schmidt: Ann. d. Phys. **61**, 633, 1920, und H. S. Allen: Phil. Mag., S. 323, 1900 (Sept.); jedoch sind sie für uns nur bedingt brauchbar, da keine laminaren Verhältnisse bestanden.

Es gilt dann:

$$m\ddot{y} + \sum^{n} K_j = G\,. \tag{57}$$

Es sei betont, daß hier m die träge Masse bedeutet: $m = v\,(\sigma_f + \frac{1}{2}\,\sigma_\beta)$, weiter ist das reduzierte Gewicht $G = gv\,(\sigma_f - \sigma_\beta)$, woraus die Beschleunigung $g' = \dfrac{G}{m} = g\,\dfrac{\sigma_f - \sigma_\beta}{\sigma_f + \frac{1}{2}\,\sigma_\beta}$. Hierzu kommen, wie immer, die Gleichungen (4); das Problem stellt sich als eine Kombination der beiden vorhergehenden Abschnitte dar. An Stelle von Gleichung (8) bzw. (41) tritt hier auf:

$$\left.\begin{aligned} y^{(n+2)} + \sum \gamma_j y^{(n+1)} + \sum \gamma_j \gamma_k y^{(n)} \cdots \gamma_j \cdots \gamma_n y^{(2)} + \sum' \frac{\alpha_j}{m}\,[y^{(n)} + \sum \gamma_k y^{(n-1)} + \cdots \gamma_k \cdots \gamma_n y^{(1)}] \\ = \Pi \gamma_j \frac{G}{m}\,. \end{aligned}\right| \tag{58}$$

Die Fortführung der Rechnung schließt sich an Abschnitt I an [Einführung von $\dot{y}$ nach Gleichung (9), A nach Gleichung (11) und z nach Gleichung (12)]; statt Gleichung (15) wird erhalten:

$$\sum^{n} \frac{\alpha_j}{\gamma_j + x} = -\,mx\,, \tag{59}$$

in formaler Übereinstimmung mit Gleichung (44), wobei jedoch das x hier erst über z mit y verknüpft ist und insofern eine andere Bedeutung besitzt. Für die Diskussion von Gleichung (59) gelten natürlich die Betrachtungen in Abschnitt II. Nennen wir die $(n+1)$ Lösungen von Gleichung (59) wieder $x = -q$, so folgt zuerst für $\dot{y}$:

$$\dot{y} = \sum^{n+1} C_l e^{-q_l t} + A \tag{60}$$

und schließlich

$$\left.\begin{aligned} y = \sum^{n+1} \frac{C_l}{q_l}\,[1 - e^{-q_l t}] + At \\ \left(\text{wo } A = \frac{1}{\sum' \frac{\alpha_j}{\gamma_j}\,G}\right). \end{aligned}\right| \tag{61}$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich von Gleichung (25) trotz äußerer Gleichheit sehr wesentlich. Während im Abschnitt I der Versuch so geleitet gedacht ist, daß die rein elastische Anfangsdeformation sich zeit- und trägheitslos als die endliche Größe y_0 einstellt, beginnt hier der Versuch mit

$$y_0 = 0\,; \quad \dot{y}_0 = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{y}_0 = g' \tag{62}$$

(wo g' die reduzierte Erdbeschleunigung darstellt). Diese und weitere Grenzbedingungen an der Stelle 0 folgert man aus den Gleichungen (4) und ihren Abgeleiteten unter Benutzung von $K_{j0} = 0$. Wenn also in Gleichung (61) das y_0 fehlt, so sind dafür zwei Glieder der Summe Σ neu aufgetreten, da diese in Gleichung (61) bis $n+1$, in Gleichung (25) bis $n-1$ läuft.

Zwei der q_l können komplex sein, was einer gedämpft periodischen Anfangsschwingung entspricht. Sind erstens alle q_l reell, so ist der Verlauf von Gleichung (61) etwa der in Fig. 5 ge-

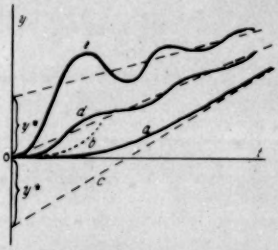


Fig. 5. Fall einer Kugel im zähen Medium. *a* aperiodisch, *d* und *e* periodisch.

gebene (*a*), also völlig anders als in Abschnitt I. Die Bewegung beginnt unter allen Umständen auf der Kurve des freien Falles $y = \frac{1}{2}\,g' t^2$, die durch (*b*) gekennzeichnet ist. Die Endtangente (*c*), deren Richtung

$$\dot{y}_\infty = A \tag{63}$$

die Kombination $\sum' \frac{\alpha_j}{\gamma_j}$ festlegt, schneidet auf der Ordinate diesmal im negativen das Stück $|y^*|$ ab, das wegen

$$y^* \equiv (y - At)_{t=\infty} = \sum' \frac{C_l}{q_l} < 0 \tag{64}$$

eine weitere Bestimmungsgleichung der Konstanten liefert. Weitere Gleichungen dieser Art lassen sich grundsätzlich aus dem Verlauf von (*a*) ableiten; dabei hat man aber zu beachten, daß jedes C eine Funktion aller q_l ist, die sich unter Benutzung der Gleichung (4) mit $K_0 = 0$ ergibt. Der Zusammenhang der q_l mit den gesuchten α- und γ-Größen folgt aus Gleichung (59). Da dies im allgemeinen ziemlich verwickelt ist,

beschränken wir uns hier auf den Fall nur einer „Sorte" ($n = 1$).

Gleichung (61) wird hierfür:

$$y = \frac{C_1}{q_1}(1 - e^{-q_1 t}) + \frac{C_2}{q_2}(1 - e^{-q_2 t}) + At\,.$$

Darin ist $A = \dot{y}_\infty = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \cdot G$. Weiter wird:

$$\dot{y}_0 = C_1 + C_2 + A = 0 \qquad (65a)$$

und

$$\ddot{y}_0 = -q_1 C_1 - q_2 C_2 = g'\,. \qquad (65b)$$

Elimination der C_1 und C_2 aus Gleichung (63), (64), (65a) und (65b) liefert:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{q_2 - q_1}\left[\frac{1}{q_1}(q_2 \dot{y}_\infty - g') \right.\\ &\left. \qquad + \frac{1}{q_2}(g' - q_1 \dot{y}_\infty)\right] = -y^*\,. \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

Gleichung (59) lautet hier $\frac{\alpha_1}{\gamma_1 - q} = m \cdot q$, woraus folgt: $q_1 + q_2 = \gamma_1$; $q_1 \cdot q_2 = \frac{\alpha_1}{m}$; oder

$$\frac{q_1 + q_2}{q_1 q_2} = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} m = \dot{y}_\infty \frac{m}{G} = \frac{\dot{y}_\infty}{g'}\,. \qquad (67)$$

Gleichung (66) läßt sich in der Form schreiben:

$$\frac{q_1 + q_2}{q_1 q_2}\dot{y}_\infty - \frac{1}{q_1 q_2} g' = -y^*\,,$$

und dies liefert mit Gleichung (67)

$$\left.\begin{aligned} q_1 q_2 &= \frac{g'}{\frac{\dot{y}_\infty^2}{g'} + y^*} = \frac{\alpha_1}{m}\\ q_1 + q_2 &= \frac{\dot{y}_\infty}{\frac{\dot{y}_\infty^2}{g'} + y^*} = \gamma_1\,, \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

womit α_1 und γ_1 auf die Meßgrößen $\dot{y}_\infty$ und y^* zurückgeführt sind.

Der Umstand, daß man bei diesem Fallversuch einer Kugel in Flüssigkeit schließlich in das Stokessche Gebiet und damit zum Begriff der Zähigkeit gelangt, wird uns im Abschnitt V beschäftigen.

Gleichung (68) gilt auch für den periodischen Vorgang, wobei $\frac{\alpha}{m} > \frac{\gamma^2}{4}$. Wir verzichten hier auf eine eingehende Darstellung, da dies Gebiet Gegenstand einer besonderen experimentellen Arbeit sein soll, und beschränken uns auf die graphische Wiedergabe einiger möglicher Fallkurven (Fig. 5d und e). Mit wachsendem y^* geht die aperiodische Bewegung in eine periodische über, und zwar an einer Stelle, die noch von der Größe und dem spezifischen Gewicht der verwandten Kugel abhängt. Dabei wird das anfänglich negative y^* schließlich positiv; jedoch besitzt die aperiodische Grenzkurve immer ein negatives $\dot{y}^*$. $y^* = 0$ (Fig. 5d), entspricht also immer einem periodischen Vorgang. Gelingt es, die notwendigen experimentellen Bedingungen für den Einzelfall zu verwirklichen, so sollte die Untersuchung dieses vielseitigen Falles von besonderem Interesse sein.

Von F. S. Schmidt (l. c.) wurden derartige Versuche (fallende Kugeln oder steigende Ballone) ausgeführt, wobei unter bestimmten Bedingungen Kurven nach Art von Fig. 5 gefunden wurden. Allerdings sind diese Versuche nicht restlos beweisend, da bei ihnen keine laminaren Strömungen vorlagen. Trotzdem muß wohl der periodische Verlauf qualitativ im Sinne dieser Arbeit aufgefaßt und die beobachtete Wirbelbildung als sekundärer Vorgang bewertet werden.

IV. Erzwungene Schwingungen

Für alle eigentlich „festen" Körper dürfte die Methode der erzwungenen Schwingungen die größte Bedeutung besitzen, weil ihre Auswertung die geringsten Schwierigkeiten bietet, wie schon Arbeit I zeigte, und weil die „mikroskopartige" Eigenschaft der Resonanz den empfindlichsten Nachweis unserer Konstanten α_j und γ_j liefert. Wie weit sie sich auf Flüssigkeiten übertragen läßt (Ultraschall), soll hier nicht untersucht werden.

Die erregende Kraft habe die Frequenz Ω; dann gilt:

$$m\ddot{y} + \sum_1^n K_j = R e^{i\Omega t}\,. \qquad (69)$$

Die übliche Elimination der K_j mit Hilfe von Gleichung (4) führt zu:

$$\left.\begin{aligned} &y^{(n+2)} + \sum \gamma_j y^{(n+1)} + \sum \gamma_j \gamma_k + \cdots \gamma_j \cdots \gamma_n y^{(2)}\\ &\quad + \sum_j \frac{\alpha_j}{m}\left[y^{(n)} + \sum \gamma_k y^{(n-1)} + \sum \gamma_k \gamma_l y^{(n-2)} + \cdots + \gamma_k \gamma_l \gamma_i y^{(1)}\right] = \prod_j (\gamma_j + i\Omega)\frac{R}{m} e^{i\Omega t}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

Die Lösung lautet hier:

$$y = F e^{i\Omega t}\,, \qquad (71)$$

worin F noch zu ermitteln ist. Damit geht Gleichung (70) über in:

$$F\left[-\Omega^2\prod_j(\gamma_j+i\Omega)+i\Omega\sum_j\left\{\frac{\alpha_j}{m}\prod_k(\gamma_k+i\Omega)\right\}\right]=\frac{R}{m}\prod_j(\gamma_j+i\Omega)\,;\quad(k\neq j)\qquad(72)$$

Nach Kürzung folgt:

$$F=\frac{R}{m}\cdot\frac{1}{\Omega^2\left[\sum\frac{\alpha_j}{m(\gamma_j^2+\Omega^2)}-1\right]+i\Omega\sum\frac{\alpha_j\gamma_j}{m(\gamma_j^2+\Omega^2)}}\,.\qquad(73)$$

Setzt man den Nenner des zweiten Bruches gleich $\varrho\cos\varphi+i\varrho\sin\varphi$, so geht F und damit y nach Gleichung (71) über in:

$$y=\frac{R}{m\varrho}\,e^{i(\Omega t-\varphi)}=\frac{R}{m\varrho}\cos(\Omega t-\varphi)\,,\qquad(74)$$

worin ϱ und φ bedeuten:

$$\left.\begin{aligned}\varrho&=\sqrt{\Omega^4\left[\sum\frac{\alpha_j}{m(\gamma_j^2+\Omega^2)}-1\right]^2+\Omega^2\left[\sum\frac{\alpha_j\gamma_j}{m(\gamma_j^2+\Omega^2)}\right]^2}\\ \operatorname{tg}\varphi&=\sum\frac{\alpha_j\gamma_j}{m(\gamma_j^2+\Omega^2)}:\Omega\left[\sum\frac{\alpha_j}{m(\gamma_j^2+\Omega^2)}-1\right].\end{aligned}\right|\qquad(75)$$

Benutzen wir wieder die Beziehung (16a) und führen, wie in Abschnitt II die rein elastische Eigenfrequenz ω des Systems durch Gleichung (45) $\sum_j\frac{\alpha_j}{m}=\omega^2$ ein, so wird die erzwungene Amplitude b an der Stelle $\cos(\Omega t-\varphi)=1$:

$$b=\frac{R}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[\omega^2\sum\frac{\eta_j\Omega^2}{\gamma_j^2+\Omega^2}-\Omega^2\right]^2+\left[\omega^2\sum\frac{\eta_j\gamma_j\Omega}{\gamma_j^2+\Omega^2}\right]^2}}\,.\qquad(76)$$

Wir haben hier eine Gleichung gedämpfter Resonanz vor uns, die sich jedoch von der üblichen nicht unwesentlich unterscheidet. Obwohl n „Sorten" vorhanden sind, existiert doch nur eine Resonanzstelle bei Variation von Ω, wie man aus folgendem ersieht. Das erste Glied unter der Wurzel läßt sich schreiben:

$$\Omega^4\left[\omega^2\sum\frac{\eta_j}{\gamma_j^2+\Omega^2}-1\right]^2.$$

Die Klammer wird bei hinreichend großem Ω sicher einmal negativ; da nun bei abnehmendem Ω jedes Summenglied einzeln monoton steigt, also auch die Summe, kann der Nullwert der Klammer, wenn überhaupt, nur einmal überschritten werden. Also existiert nur eine Resonanzstelle. Andererseits besteht das zweite Glied in der Form

$$\omega^4\left[\sum\frac{\eta_j}{\frac{\gamma_j}{\Omega}+\frac{\Omega}{\gamma_j}}\right]^2$$

aus n Gliedern, deren jedes bei Variation von Ω ein Maximum besitzt, so daß also jeder „Sorte" eine Stelle maximaler Absorption entspricht. Führt man diese Variation von Ω bei jeweilig verschiedenem ω, d. h. veränderten dynamischen Eigenschaften des Systems (Länge, Masse usw.), aus, so erhält man ein vollständiges Absorptionsspektrum des Materials, das sich durch eine algebraische Analyse in die Elementargrößen η_j und γ_j aufspalten läßt.

Als Meßgrößen kämen zunächst die Amplitude b und die Eigenfrequenz ω in Betracht, die man als Funktionen von Ω in die Gleichung (76) einzutragen hätte, um daraus die η und γ zu bestimmen. Indessen scheitert das daran, daß in der Praxis weder ω noch R genau genug angebbar sind; außerdem werden die Amplituden im allgemeinen sehr klein. Man beschränkt sich deshalb besser auf die Umgebung der Resonanzstellen. Die letzteren sind gekennzeichnet durch die Gleichung:

$$\omega^2\sum\frac{\eta_j}{\gamma_j^2+\Omega_{res}^2}=1\,.\qquad(77)$$

Führt man dieses in Gleichung (76) ein, so erhält man:

$$b_{res} = \frac{R}{m} \cdot \frac{\sum \eta_j}{\gamma_j^2 + \Omega_{res}^2} : \sum' \frac{\eta_j \gamma_j \Omega_{res}}{\gamma_j^2 + \Omega_{res}^2} \,. \tag{78}$$

Zur Beseitigung von $\frac{R}{m}$ bildet man aus Gleichung (78) und (76)

$$\left(\frac{b_{res}}{b} \cdot \frac{\Omega_{res}}{\Omega}\right)^2 = \frac{\Omega^2 \left[\sum' \frac{\eta_j}{\gamma_j^2 + \Omega^2} - \sum' \frac{\eta_j}{\gamma_j^2 + \Omega_{res}^2}\right]^2 + \left[\sum' \frac{\eta_j \gamma_j}{\gamma_j^2 + \Omega^2}\right]^2}{\left[\sum' \frac{\eta_j \gamma_j}{\gamma_j^2 + \Omega_{res}^2}\right]^2} \,. \tag{79}$$

Man wählt als Ω diejenigen aus, für die die Amplituden $b = \frac{1}{2} b_{res}$ werden; dann ist die Halbwertsbreite der Resonanz 2δ gegeben durch $\Omega = \Omega_{res} \pm \delta$. Damit wird Gleichung (79) schließlich hinreichend genau, solange $\delta \ll \Omega_{res}$,

$$\frac{2\delta}{\sqrt{3}\,\Omega_{res}} = \frac{1}{2} \sum' \frac{\eta_j}{\mathfrak{Coj} \ln \frac{\gamma_j}{\Omega_{res}}} : \sum' \frac{\eta_j}{\left[1 + \left(\frac{\gamma_j}{\Omega_{res}}\right)^2\right]^2} \,. \tag{80}$$

Die links stehende Meßgröße ist eine reine Funktion von Ω_{res}, so daß sich hieraus die gesuchten Materialkonstanten η_j und γ_j grundsätzlich ermitteln lassen. Diese Meßgröße ist mit dem bei freier Abklingung auftretenden Dekrement λ eng verknüpft, und zwar gilt (angenähert):

$$\lambda = \frac{\pi}{M} \frac{2\delta}{\sqrt{3}\,\Omega_{res}} \,. \tag{81}$$

Beachtet man, daß für $\eta_1 \approx 1$ und $\gamma_1 = 0$ der Nenner in Gleichung (80) ≈ 1 ist, so geht Gleichung (81) mit (80) in die Gleichung (17) der Arbeit I über.

V. Viskosität, Torsionsmodul und Elastizitätsmodul, insbesondere bei Flüssigkeiten

In den vorhergehenden Abschnitten sind eine Anzahl von Meßverfahren diskutiert worden, die es gestatten, das plastisch-elastische Verhalten eines Stoffes auf gewisse Elementargrößen γ_j und η_j bzw. α_j zurückzuführen. Dabei ist zu beachten, daß nur die γ_j und η_j den Charakter von Materialgrößen besitzen, während die α_j noch einen (gemeinsamen) Formfaktor F enthalten gemäß: $E = F \Sigma \alpha_j$. Man kann nun den Elastizitätsmodul selber aufspalten nach:

$$E_j = F \alpha_j = E \eta_j \tag{82}$$

worin dann die E_j wahre Materialgrößen werden. Um diese zu bestimmen, bedarf es also der Kenntnis des Formfaktors F. Bei eigentlich festen Körpern läßt sich dieser aus der geometrischen Massenverteilung wohl immer direkt bestimmen, nicht dagegen bei Flüssigkeiten, z. B. Kugelfallversuchen.

Nun besitzen wir für Flüssigkeiten noch eine andere, bisher nicht benutzte Meßgröße, die Viskosität $[\eta]$, die zu unseren Elementargrößen in Beziehung stehen muß. Hierzu führen wir folgenden Gedankengang aus:

In einem rein elastischen Material wirke im Abstande $x = d$ von einer festen Grundfläche f eine Kraft K parallel zu dieser und erzeuge eine Deformation y_0 und einen Scherungswinkel χ. Dann gilt, wenn Φ der Torsionsmodul ist:

$$K = \Phi \chi f \tag{83}$$

und

$$\chi = \frac{y_0}{d} \,. \tag{84}$$

Das gleiche System bestehe nun aus einer reibenden Flüssigkeit mit der Viskosität $[\eta]$. Dann gilt definitionsgemäß

$$K = \frac{\partial \dot{y}_\infty}{\partial x} [\eta] f = \frac{\dot{y}_\infty}{d} [\eta] \cdot f \,, \tag{85}$$

wobei der Index ∞ den stationären Zustand bezeichnen soll.

Derselbe Vorgang drückt sich in unserer Theorie durch die Gleichung (24) aus, d. h. durch Abschnitt I, da die Trägheitskräfte hierbei ausgeschaltet gedacht werden müssen. Die Gleichung (24) lautet für den stationären Zustand ($t = \infty$):

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_\infty = A &= \frac{1}{\sum_1^n \frac{\alpha_j}{\gamma_j}} \cdot G \\ &= \frac{1}{\sum_1^n \frac{\eta_j}{\gamma_j}} \cdot \frac{G}{\sum_1^n \alpha_j} = \frac{1}{\sum_1^n \frac{\eta_j}{\gamma_j}} \cdot y_0 \end{aligned}\right| \tag{86}$$

[nach Gleichung (11) und (26)]. Aus Gleichung (85) und (83) mit Gleichung (86) und (84) folgt für die Viskosität:

$$[\eta] = \Phi \cdot \sum^{n} \frac{\eta_j}{\gamma_j} = \frac{E}{2(\mu+1)} \sum^{n} \frac{\eta_j}{\gamma_j} = \frac{1}{2(\mu+1)} \sum \frac{E_j}{\gamma_j}. \quad (87)^1)$$

Betrachtet man $[\eta]$ als unabhängige Meßgröße, so ist damit der Elastizitätsmodul E gegeben zu:

$$E = 2(1+\mu) \frac{[\eta]}{\sum \frac{\eta_j}{\gamma_j}}; \quad (88)$$

der Querkontraktionskoeffizient μ darf dabei als bekannt, bei reinen Flüssigkeiten $\approx 0{,}5$, angesehen werden. Für den Formfaktor F folgt dann:

$$F = \frac{E}{\sum \alpha_j} = 2(1+\mu) \frac{[\eta]}{\sum \frac{\alpha_j}{\gamma_j}}. \quad (89)$$

Darüber hinaus können wir jedoch insbesondere bei Kugelfallversuchen die hydrodynamische Aussage der Stokesschen Formel heranziehen:

$$G = 6\pi R[\eta] \cdot \dot{y}_\infty. \quad (90)$$

Es wird dann

$$6\pi R[\eta] = \frac{G}{\dot{y}_\infty} = \sum \frac{\alpha_j}{\gamma_j} = 2(1+\mu)\frac{[\eta]}{F} \quad (91)$$

oder

$$F = \frac{1+\mu}{3\pi R}, \quad (92)$$

was für Flüssigkeiten mit $\mu = 0{,}5$ übergeht in

$$F = \frac{1}{2\pi R}, \quad (92a)$$

als dem reziproken Umfang der Kugel. Also wird (bei Gültigkeit der Stokesschen Formel, d. h. laminarer Strömung):

$$E_j = \frac{1+\mu}{3\pi R} \cdot \alpha_j. \quad (93)$$

Damit sind die reinen Materialkonstanten E_j der Messung zugänglich geworden. Andererseits ergibt sich für die Torsions- bzw. Elastizitätsmoduln der Flüssigkeit die doppelte Darstellung:

$$\Phi = [\eta] \frac{1}{\sum \frac{\eta_j}{\gamma_j}} = \frac{1}{6\pi R} \sum \alpha_j, \quad (94)$$

$$E = 2(1+\mu)[\eta] \frac{1}{\sum \frac{\eta_j}{\gamma_j}} = \frac{1+\mu}{3\pi R} \sum \alpha_j. \quad (95)$$

VI. Klassifizierung des plastisch-elastischen Zustandes

Nachdem nunmehr die $2n$-Materialgrößen γ_j und E_j (neben μ) experimentell ermittelbar geworden sind, erhebt sich die Frage, ob und wieweit mit ihrer Hilfe eine Klassifizierung der plastisch-elastischen Systeme durchzuführen ist.

Der ideale Festkörper ist offenbar dadurch charakterisiert, daß er nach irgendwelchen stattgehabten Deformationen schließlich wieder zur Anfangsform zurückkehrt, d. h. daß er mindestens ein stabiles Gerüst enthält, also daß $\gamma_1 = 0$ ist. Dieser Grenzfall läßt sich noch in drei Unterfälle zerlegen:

1. der ideal starre Festkörper: alle $\gamma_j = 0$; also nur eine Sorte vorhanden, deren $E = \infty$;
2. der ideal elastische Festkörper; alle $\gamma_j = 0$; also nur eine Sorte vorhanden, deren E endlich;
3. der ideal nachwirkende Festkörper: $\gamma_1 = 0$; $\gamma_2, \gamma_3 \ldots$ endlich; alle E_j endlich.

Nach Gleichung (87) folgt aus $\gamma_1 = 0$ für die Zähigkeit eines idealen Festkörpers $[\eta] = \infty$.

Umgekehrt müssen wir für die ideale Flüssigkeit ansetzen: $[\eta] = 0$ (also identisch mit „reibungsloser" Flüssigkeit). Nach Gleichung (87) ist das auf zwei Weisen erfüllbar:

1. das ideale Gas: die γ_j beliebig; alle $E_j = 0$ (also kräftefrei);
2. die ideal fluide Flüssigkeit: alle $\gamma_j = \infty$; die E_j endlich (Kräfte vorhanden).

Alle diese Typen stellen idealisierte Grenzfälle dar, denen sich die realen Typen mehr oder weniger annähern können, wobei für die letzteren aber ganz allgemein gilt: alle $\gamma_j > 0$ und alle $E_j > 0$). Will man trotzdem den praktischen Gegensatz: fest–flüssig in diesem Typenkontinuum aufrechterhalten, also etwa einen Gegensatz: plastischer Festkörper – elastische Flüssigkeit formulieren, so zeigt besonders Abschnitt III, daß hierbei das periodisch-aperiodische Verhalten eine wesentliche Rolle spielt. Da nun dieses nicht ausschließlich von Materialkonstanten, sondern auch von dem Formfaktor und dem betrachteten Vorgang abhängt, so ist eine Zuordnung der Begriffe fest–flüssig nur

1) In einer vorläufigen Mitteilung (Naturwiss. 26, 661, 1938) gelangt W. Kuhn zu einer Beziehung $[\eta] = 0{,}385\, \Sigma\, e_i \tau_i$, die mit unserer identisch ist, wenn $\mu = 0{,}3$ (Glas) gesetzt wird. – Zusatz bei der Korrektur: Die ausführliche Arbeit (Zeitschrift f. Phys. Chem. B. **42**, 1) kam uns erst nachträglich zu Gesicht.

dann möglich, wenn sie auf den betreffenden Vorgang Bezug nimmt. Dabei steht das Zeitliche, z. B. die Frequenz oder Versuchsdauer, des Vorganges im Vordergrund. Diese Auffassung ist durchaus nicht neu; nur bedarf es zu ihrer quantitativen Durchführung eines geeigneten Ansatzes, dessen einfachste Form die hier behandelte sein dürfte.

Zusammenfassung

1. In Weiterentwicklung fremder und eigener Vorstellungen über das plastisch-elastische Verhalten der Materie wird statt der Zerlegung in ein elastisches Gerüst und eine plastische Zwischensubstanz eine solche in n „Sorten" von Bausteinen vorgenommen, deren jede aus einer elastischen (E_j) und einer plastischen (γ_j) Komponente besteht. Damit wird der Bereich der Beschreibung auf das ganze Gebiet der Flüssigkeiten ausgedehnt.
2. Die Theorie wird durchgeführt in Hinblick auf folgende der Messung zugängliche Vorgänge: Deformation bei konstanter Belastung, freie und erzwungene Schwingungen und Fallbewegung im Medium. Die Zurückführung der gewonnenen Meßgrößen auf die Materialkonstanten E_j und γ_j wird diskutiert.
3. Während bei Festkörpern der Formfaktor als unmittelbar aus der Mechanik gegeben betrachtet werden darf, benötigt man bei Flüssigkeiten noch die Hydrodynamik, und zwar bei Kugelfallversuchen speziell die Stokessche Formel. Auf diesem Wege gewinnt man die vollständige Lösung, einschließlich des Torsionsmoduls der Flüssigkeit, oder (bei bekanntem μ) ihres Elastizitätsmoduls, und ihrer Zähigkeit.
4. Auf Grund der gewonnenen Materialkonstanten E_j und γ_j wird eine erste Klassifizierung der plastisch-elastischen Stoffe angedeutet.
5. Eine Bestätigung der Theorie liegt bei plastischen Festkörpern insofern vor, als eine empirisch aufgestellte Formel von Taylor, Namara und Sherman zwangsläufig aus ihr folgt. Eine Bestätigung an Flüssigkeiten liegt zur Zeit noch nicht vor, weil alle uns bekannten Versuche dieser Art gewisse Bedingungen (laminare Strömung) nicht erfüllen; trotzdem geben Kugelfallversuche von F. S. Schmidt einen Hinweis auf die Existenz eines vorauszusehenden Effektes (periodische Anfangsbewegung). Eigene Versuche hierüber sind in Angriff genommen.

Jena, Chemisches Laboratorium der Universität, Physikalisch-chemische Abteilung.

(Eingegangen 5. April 1939)

Das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip für beliebige Dimensionszahl

Von Paul Otto Müller

Inhaltsübersicht

Einleitung und Problemstellung.

I. Abschnitt: Mathematische Vorbereitungen und Angabe des Weges der Herleitung des Huygens-Kirchhoffschen Prinzips für zunächst streng monochromatische Wellen.

II. Abschnitt: Ableitung des Prinzips in einem Raum von gerader Ordnung, wobei aber nur die Amplitudengleichung betrachtet wird.

III. Abschnitt: Ableitung des Prinzips in einem Raum von ungerader Ordnung; eine etwas geänderte Gestalt unserer Formel läßt eine physikalische Deutung zu, die mit den ursprünglichen Überlegungen von Huygens und Fresnel in Einklang steht.

IV. Abschnitt: Verallgemeinerung unseres Prinzips von streng harmonischen Wellen auf beliebige Wellen durch Heranziehung von Fourierreihe oder Fourierintegral.

V. Abschnitt: Das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip im R_1.

Zusammenfassung.

Einleitung und Problemstellung

Die Überlegungen von Huygens und Fresnel bestanden im wesentlichen darin, daß die Lichterregung in einem Punkte P_0 auf Sekundärwellen zurückgeführt wird, die von einer zwischen P_0 und der Lichtquelle gelegenen Fläche ausgehen. Die exakte Formulierung dieser Gedanken durch Kirchhoff erfolgte durch Heranziehung der Wellengleichung des Lichtes:

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0\,. \tag{1}$$

Danach kann die Erregung ψ_0 in einem Punkte P_0 aufgefaßt werden als Superposition von Wellen, die von den Flächenelementen df einer den Punkt P_0 einschließenden Fläche F ausgehen und deren Phasen in ganz bestimmter Weise verändert sind. Dabei ist die Fläche F an sich vollkommen willkürlich, sie muß nur P_0 ganz umschließen und in dem von ihr berandeten Gebiet B muß ψ ausnahmslos der Wellengleichung genügen[1]).

Wir wollen nun versuchen, das von Kirchhoff nur für den R_3 gegebene Prinzip auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern und werden also im Falle des Gelingens dieses Versuches erwarten, daß im R_n die Erregung im Aufpunkt

1) Vgl. z. B. H. Schmidt, Einführung in die Theorie der Wellengleichung, 1931. Die dort gegebene Ableitung läßt sich nicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern, da der Ausdruck (4, 4) auf S. 16 nur im R_3 eine Divergenz darstellt.

P_0 bestimmt ist durch die Werte von ψ auf einer P_0 einschließenden $(n-1)$-dimensionalen „Fläche" F; auch in diesem Falle werden die Phasen der Wellen, deren Superposition ψ_0 ergibt, in ganz bestimmter Weise verändert sein[1]).

Beim Versuch, das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern, werden wir uns mit n-dimensionalen Räumen B und deren $(n-1)$-dimensionalen Begrenzungsflächen F zu befassen haben. Die sinngemäße Übertragung der Gebilde der Differentialgeometrie vom R_3 auf den R_n setzen wir als bekannt voraus; erwähnt sei nur, daß im besonderen Differentiation nach einer Richtung, Raum- und Flächenintegrale sich leicht für beliebige Dimensionen definieren lassen.

Ferner zeigt die Differential- und Integralrechnung das Bestehen der Integralsätze von Gauß und Green. Wenn ν die aus dem Bereich B herausweisende Normale der Fläche F ist, so gilt:

$$\int_B \operatorname{div} \mathfrak{A}\, d\tau = \int_F \mathfrak{A}_\nu \cdot df$$

bzw.

$$\int_B (u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, d\tau = \int_F u \frac{\partial v}{\partial \nu} \cdot df$$

sowie

$$\int_B (u \Delta v - v \Delta u)\, d\tau = \int_F \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) df. \quad (2)$$

Die Voraussetzungen für das Bestehen dieser Sätze, für die Existenz der Integrale usw., sind die gleichen wie im R_3; ebenso gelten auch hier die Mittelwertsätze der Integralrechnung. Ferner wollen wir stillschweigend alle Voraussetzungen der Stetigkeit, Differenzierbarkeit usw. der auftretenden Funktionen als erfüllt annehmen, um nicht mit solchen rein mathematischen Untersuchungen aufgehalten zu werden.

Wir werden im folgenden die Formel für die Oberfläche O der $(n-1)$-dimensionalen Kugel $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$ benötigen, die wir aus der Volumsformel[2]) wegen der Beziehung $V = \frac{r \cdot O}{n}$ leicht bestimmen können.

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \cdot r^n; \\ O &= \frac{n \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \cdot r^{n-1} = f \cdot r^{n-1}. \end{aligned}\right| \quad (3)$$

Das Symbol Γ bedeutet die Gammafunktion: $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \cdot e^{-x} dx$, deren Rechenregeln wir als bekannt voraussetzen.

So erhält man im Raum mit gerader Dimensionszahl n die Formel:

$$O = \frac{n \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \cdot r^{n-1}. \quad (4)$$

und bei ungerader Dimensionszahl:

$$O = \frac{2 \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-2)} \cdot r^{n-1}. \quad (5)$$

1. Abschnitt

Wir wollen in diesem Abschnitt zunächst einmal versuchen, das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip für streng monochromatische Wellen abzuleiten, also für Wellen der Gestalt:

$$\psi = u(x_1, \ldots x_n) \cdot e^{i\omega t} = u(\mathfrak{x}) \cdot e^{i\omega t}.$$

Setzt man zur Abkürzung $k = \frac{\omega}{c}$, so erfüllt die Amplitude $u(\mathfrak{x})$ diese Gleichung:

$$\Delta u(\mathfrak{x}) + k^2 \cdot u(\mathfrak{x}) = 0. \quad (6)$$

Für irgendeine andere Welle der gleichen Frequenz: $\varphi = v(\mathfrak{x}) \cdot e^{i\omega t}$ erfüllt die Amplitude $v(\mathfrak{x})$ dieselbe Amplitudengleichung (6).

$$\left.\begin{aligned} \Delta u + k^2 \cdot u &= 0 \\ \Delta v + k^2 \cdot v &= 0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &-v \\ &u \end{aligned} \Bigg\} \; u \Delta v - v \Delta u = 0.$$

Dieser Ausdruck kommt auch in der Greenschen Formel (2) vor, so daß deren Verwendung naheliegt. Wir wählen zu diesem Zweck einen Bereich B, der von der „Fläche" F berandet wird und in dessen Innerem der Aufpunkt P_0 liegt. Der Punkt P_0 habe den Ortsvektor $\mathfrak{x}_0$.

Verstehen wir unter $\varphi = v(\mathfrak{x}) \cdot e^{i\omega t}$ eine im Aufpunkt P_0 singuläre Welle, so können wir P_0 als Mittelpunkt einer kleinen Hyperkugel vom Radius r wählen; bedeutet B_0 den von der Hyperkugelfläche F_0 eingeschlossenen Bereich,

[1]) Vgl. Acta Mathematica (Mittag-Leffler) 1894, 18: V. Volterra, Sur les vibrations des corps élastiques isotropes; Atti della Reale Accademia dei Lincei 1892, V, Rendiconti, Vol. I: V. Volterra, Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi. V. Volterra kommt dort zum n-dimensionalen Huygens-Kirchhoffschen Prinzip auf einem Wege, der ganz anders ist als der, den wir hier einschlagen werden.

[2]) A. Waßmuth, Grundlagen und Anwendungen der statistischen Mechanik, Anhang III, S. 110, 1922.

so gehört die singuläre Stelle nicht mehr dem Restgebiet $B - B_0$ an, so daß der Greensche Satz anwendbar ist.

Das Raumintegral fällt aber fort, und kehrt man auf der Hyperkugelfläche den Sinn der Normalen ν um, so erhält man schließlich:

$$\int_{F_0}\left(u\frac{\partial v}{\partial r} - v\frac{\partial u}{\partial r}\right)df = \int_{F}\left(u\frac{\partial v}{\partial r} - v\frac{\partial u}{\partial r}\right)df. \quad (7)$$

Wählt man $v = v(\mathfrak{x})\cdot e^{i\omega t}$ nicht nur singulär, sondern auch noch bezüglich P_0 radialsymmetrisch und läßt dann die Hyperkugel auf diesen Punkt zusammenschrumpfen, so konvergiert, wie wir sehen werden, das Integral über F_0 gegen const. $u(\mathfrak{x}_0)$, wenn $\mathfrak{x}_0$ den Ortsvektor von P_0 bedeutet.

Dann aber ist die Amplitude $u(\mathfrak{x}_0)$ im Aufpunkt dargestellt durch die Werte der Erregung auf der Fläche F, so daß man das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip als bewiesen ansehen kann.

Wir müssen uns nun eine radialsymmetrische, in P_0 singuläre Lösung $v(\mathfrak{x}) = v(r)$ der Amplitudengleichung (6) verschaffen, wenn r den Abstand von P_0 bedeutet.

$$\Delta v + k^2\cdot v \equiv \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\cdot\frac{dv}{dr} + k^2\cdot v = 0\,.$$

Setzt man $\varrho = kr$ und nennt $\frac{dv}{d\varrho} = \dot{v}$, $\frac{d^2v}{d\varrho^2} = \ddot{v}$, so erhält man die Gleichung:

$$\ddot{v} + (n-1)\frac{1}{\varrho}\dot{v} + v = 0\,.$$

Die Transformation $w = \varrho^{\frac{n}{2}-1}\cdot v = \varrho^s\cdot v$ mit $s = \frac{n}{2} - 1$ liefert uns dann die wohlbekannte Besselsche Differentialgleichung:

$$\varrho^2\ddot{w} + \varrho\dot{w} + (\varrho^2 - s^2)w = 0\,.$$

Die Gestalt der an der Stelle $r = 0$ oder $\varrho = 0$ singulären Besselfunktion hängt nun davon ab, ob s ganzzahlig ist oder nicht, d. h. ob die Dimensionszahl n gerade oder ungerade ist.

II. Abschnitt

Die Dimensionszahl n ist gerade

Bei gerader Dimensionszahl n oder ganzzahligem s hat man für w zu wählen[1]: $w = Y_s(\varrho)$, da diese Funktion für $\varrho = 0$ singulär wird.

$$w = Y_s(\varrho) = I_s(\varrho)\lg\varrho - 2^{s-1}\cdot(s-1)!\,\varrho^{-s} + c_1\varrho^{-s+2} + \cdots$$

$$v(r) = \varrho^{-s}\cdot Y_s(\varrho) = (kr)^{1-\frac{n}{2}}\cdot Y_{\frac{n}{2}-1}(kr)\,.$$

Mein Integral über die Hyperkugel nimmt dann die Gestalt an:

$$\int_{F_0}\left(u\frac{\partial v}{\partial r} - v\frac{\partial u}{\partial r}\right)df = \int_{F_0}\left\{u\frac{d}{dr}\left[(kr)^{-s}\cdot Y_s(kr)\right] - (kr)^{-s}\cdot Y_s(kr)\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right\}df. \quad (8)$$

Wendet man auf dieses Integral über F_0 den Mittelwertsatz an und bezeichnet mit den Querstrichen die Zwischenwerte von u und $\frac{\partial u}{\partial r}$ auf der Hyperkugelfläche und die Oberfläche der Hyperkugel mit $O = f\cdot r^{n-1}$, so ergibt sich wegen $n - 1 = 2s + 1$:

$$\int_{F_0} = \left\{\bar{u}\cdot k\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^{-s}Y_s(\varrho)\right] - \varrho^{-s}Y_s(\varrho)\cdot\frac{\overline{\partial u}}{\partial r}\right\}\cdot f\cdot\frac{\varrho^{2s+1}}{k^{2s+1}}$$

$$\int_{F_0} = \frac{f}{k^{2s}}\cdot\bar{u}\cdot\varrho^{2s+1}\frac{d}{d\varrho}(\varrho^{-s}Y_s) - \frac{f}{k^{2s+1}}\cdot\frac{\overline{\partial u}}{\partial r}\cdot\varrho^{s+1}Y_s\,.$$

Lassen wir nun unsere Hyperkugel zusammenschrumpfen, also $\varrho \to 0$ konvergieren, so ist das Verhalten des obigen Integrals über F_0 bestimmt durch die Konvergenz dieser beiden Ausdrücke:

$$\varrho^{2s+1}\cdot\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^{-s}Y_s(\varrho)\right) \quad (1)$$

und

$$\varrho^{s+1}\cdot Y_s(\varrho)\,. \quad (2)$$

1. Das Verhalten von $\varrho^{2s+1}\frac{d}{d\varrho}(\varrho^{-s}Y_s)$ beim Grenzübergang $\varrho \to 0$.

1) L. Bieberbach, Differentialgleichungen, S. 197, 1926.

Unter Berücksichtigung der Gestalt von $Y_s(\varrho)$ erhält man für diesen Ausdruck folgende Reihendarstellung, wenn man zunächst einmal $s > 0$ voraussetzt:

$$\varrho^{2s+1} \cdot \frac{d}{d\varrho}(\varrho^{-s} Y_s) = -s \cdot \varrho^s \lg \varrho \, I_s(\varrho) + \varrho^s I_s(\varrho) + \varrho^{s+1} \lg \varrho \, I_s'(\varrho)$$
$$+ s!\, 2^s + c_1(-2s+2)\varrho^2 + \cdots$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich sofort:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{2s+1} \cdot \frac{d}{d\varrho}(\varrho^{-s} Y_s) = s!\, 2^s .$$

Im Falle $s = 0$, also im R_2, hat man die Konvergenz von $\varrho \cdot Y_0'(\varrho)$ zu untersuchen und erhält wegen $Y_0(\varrho) = I_0(\varrho) \cdot \lg \varrho + c_1 \varrho^2 + \ldots$ dann den gleichen Grenzwert wie oben, wenn $0! = 1$ gesetzt wird.

2. Das Verhalten von $\varrho^{s+1} \cdot Y_s(\varrho)$ beim Grenzübergang $\varrho \to 0$.

Man sieht sofort aus der Reihendarstellung von $Y_s(\varrho)$, daß sich als Grenzwert ergibt:

$$\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{s+1} Y_s(\varrho) = 0 .$$

Nach diesen Untersuchungen über die Konvergenzverhältnisse erhält man als Grenzwert unseres Integrals über F_0 schließlich folgenden Wert:

$$\lim_{r \to 0} \int_{F_0} \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) df = \frac{f \cdot s!\, 2^s}{k^{2s}} \cdot u(\mathfrak{x}_0) .$$

Da nun $s = \frac{n}{2} - 1$, ferner nach Gleichung (4) der Faktor $f = \frac{n \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$, so ergibt sich schließlich bei gerader Dimensionszahl n die Formel:

$$u(\mathfrak{x}_0) = \frac{k^{n-2}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \pi^{\frac{n}{2}}} \cdot \int_F \left\{ u \frac{\partial}{\partial \nu} \left[(kr)^{1-\frac{n}{2}} \cdot Y_{\frac{n}{2}-1}(kr) \right] - (kr)^{1-\frac{n}{2}} \cdot Y_{\frac{n}{2}-1}(kr) \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} df . \qquad (9)$$

III. Abschnitt

Die Dimensionszahl n ist ungerade

Wir werden im V. Abschnitt das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip im R_1 behandeln, so daß wir hier voraussetzen können: $n \geq 3$.

Bei ungerader Dimensionszahl n ist die Zahl $s = \frac{n}{2} - 1$ nicht mehr ganzzahlig, so daß man für $w(\varrho)$ diese an der Stelle $\varrho = 0$ singuläre Funktion zu wählen hat[1]):

$$w(\varrho) = I_{-s}(\varrho) = \frac{\varrho^{-s}}{2^{-s}\Gamma(1-s)} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{(-1)^\nu \cdot \varrho^{2\nu}}{2^{2\nu} \cdot \nu!\,(1-s)(2-s)\ldots(\nu-s)} \qquad (10)$$

$$v = \varrho^{-s} \cdot I_{-s}(\varrho) = (kr)^{1-\frac{n}{2}} \cdot I_{1-\frac{n}{2}}(kr) .$$

Auch bei ungerader Dimensionszahl haben wir das Integral über die Hyperkugelfläche F_0 zu bilden und seinen Grenzwert zu berechnen, wenn die Hyperkugel auf den Punkt P_0 zusammenschrumpft.

$$\int_{F_0} \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) df = \int_{F_0} \left\{ uk \frac{d}{d\varrho}[\varrho^{-s} I_{-s}(\varrho)] - \varrho^{-s} I_{-s}(\varrho) \frac{\partial u}{\partial r} \right\} df .$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert in diesem Falle einen ähnlichen Ausdruck wie im Raum von gerader Ordnung, wenn die Querstriche wieder die Zwischenwerte von u und $\frac{\partial u}{\partial r}$ auf F_0 bedeuten.

$$\int_{F_0} = \frac{f}{k^{2s}} \cdot \bar{u} \cdot \varrho^{2s+1} \frac{d}{d\varrho}[\varrho^{-s} I_{-s}(\varrho)] - \frac{f}{k^{2s+1}} \cdot \overline{\frac{\partial u}{\partial r}} \cdot \varrho^{s+1} I_{-s}(\varrho) .$$

1) Im R_3 wählt man natürlich: $v = 1/r \cdot e^{ikr}$.

Wir haben jetzt wiederum die Konvergenzverhältnisse der zwei Ausdrücke zu untersuchen:

1. $\varrho^{2s+1}\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^{-s}I_{-s}(\varrho)\right]$ und 2. $\varrho^{s+1}I_{-s}(\varrho)$.

1. Das Verhalten von $\varrho^{2s+1}\cdot\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^{-s}I_{-s}(\varrho)\right]$ beim Grenzübergang $\varrho\to 0$.

Da wir die Besselfunktion anschreiben können:

$$I_{-s}(\varrho)=\frac{2^s\varrho^{-s}}{\Gamma(1-s)}+c_1\varrho^{-s+2}+\cdots$$

so folgt nach ganz einfachen Rechnungen:

$$\varrho^{2s+1}\cdot\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^{-s}I_{-s}\right)=-\frac{s\cdot 2^{s+1}}{\Gamma(1-s)}+c_1\cdot(-2s+2)\cdot\varrho^2+\cdots$$

$$\lim_{\varrho\to 0}\varrho^{2s+1}\cdot\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^{-s}I_{-s}(\varrho)\right]=-\frac{s\cdot 2^{s+1}}{\Gamma(1-s)}.$$

2. Das Verhalten von $\varrho^{s+1}\cdot I_{-s}(\varrho)$ beim Grenzübergang $\varrho\to 0$.

Man erkennt sofort aus der Gestalt von $I_{-s}(\varrho)$, daß

$$\lim_{\varrho\to 0}\varrho^{s+1}\cdot I_{-s}(\varrho)=0.$$

Als Grenzwert unseres Flächenintegrals über die Hyperkugel F_0 bekommt man diesen Ausdruck:

$$\lim_{r\to 0}\int_{F_0}\left(u\frac{\partial v}{\partial r}-v\frac{\partial u}{\partial r}\right)df=-\frac{f\cdot s\cdot 2^{s+1}}{k^{2s}\cdot\Gamma(1-s)}\cdot u(\mathfrak{x}_0).$$

Da nun $s=\frac{n}{2}-1$, also $1-s=2-\frac{n}{2}$, ebenso nach Gleichung (3): $f=\frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}$, so erhält man durch die Anwendung der Formel

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda\cdot\Gamma(\lambda)\qquad(11)$$

schließlich den Ausdruck:

$$\lim_{r\to 0}\int_{F_0}=\frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\cdot n}{k^{n-2}\cdot\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}.$$

Eine mehrfache Anwendung der Formel (11) liefert nach ganz einfachen Rechnungen

$$\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n$$

und setzt man dies in die Formel für den Grenzwert des Integrals über F_0 ein, so bekommt man in einem Raum von ungerader Dimensionszahl:

$$u(\mathfrak{x}_0)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot k^{n-2}}{2^{\frac{n}{2}+1}\cdot\pi^{\frac{n}{2}-1}}\cdot\int_F\left\{u\frac{\partial}{\partial\nu}\left[(kr)^{1-\frac{n}{2}}\cdot I_{1-\frac{n}{2}}(kr)\right]-(kr)^{1-\frac{n}{2}}\cdot I_{1-\frac{n}{2}}(kr)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right\}df.\qquad(12)$$

Ist also irgendeine in einem Bereich B reguläre Lösung $u(\mathfrak{x})$ der Amplitudengleichung $\Delta u+k^2\cdot u=0$ vorgegeben, so läßt sich ihr Wert $u(\mathfrak{x}_0)$ in einem im Innern von B liegenden Punkte $P_0(\mathfrak{x}_0)$ darstellen durch ein Integral über die $(n-1)$-dimensionale Berandung F von B.

$$u(\mathfrak{x}_0)=A\cdot\int_F\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu}-v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)df.\qquad(13)$$

wobei $v=v(r)$ eine im Aufpunkt P_0 singuläre und bezüglich dieses Punktes radialsymmetrische Lösung derselben Amplitudengleichung und A eine Konstante bedeutet.

Multipliziert man die Gleichung (13) noch mit dem Zeitfaktor, so erhält man mit $\psi(\mathfrak{x},t)=u(\mathfrak{x})\cdot e^{i\omega t}$ diese Gestalt:

$$\psi(\mathfrak{x}_0,t)=A\cdot\int_F\left(\psi(\mathfrak{x},t)\frac{\partial v}{\partial\nu}-v\frac{\partial\psi(\mathfrak{x},t)}{\partial\nu}\right)df.\qquad(14)$$

Nach obiger Formel ist die Erregung ψ im Punkt P_0 eindeutig bestimmt durch ihre Randwerte auf der Fläche F, die vollkommen willkürlich ist; F muß nur den Punkt P_0 ganz umschließen und in dem von ihr eingeschlossenen Gebiet muß $\psi(\mathfrak{x},t)$ harmonisch sein und ausnahmslos der Wellengleichung (1) genügen. Dabei darf aber nicht vergessen werden, daß die Funktion $v(r)$ auch von der (zyklischen) Frequenz ω abhängt und ebenso die Konstante A, die man auch in die Funktion $v(r)$ einbeziehen könnte.

Die Formel (14) läßt sich noch auf eine etwas andere Gestalt bringen, die eine anschauliche und einfache physikalische Deutung im Sinne der ursprünglichen Auffassung von Huygens zuläßt:

Die Formel (14) kann man nämlich auch so schreiben, wenn $\psi(\mathfrak{x}, t) = u(\mathfrak{x}) \cdot e^{i\omega t}$ eine monochromatische Welle bedeutet:

$$\psi(\mathfrak{x}_0, t) = A \cdot \int_F \left\{ \psi(\mathfrak{x}, t) \cdot e^{-i\frac{\omega r}{c}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \cdot \frac{\partial \psi(\mathfrak{x}, t)}{\partial \nu} \cdot e^{-i\frac{\omega r}{c}} \right\} e^{i\frac{\omega r}{c}} \cdot df .$$

Da nun $\psi(\mathfrak{x}, t) \cdot e^{-i\frac{\omega r}{c}} = \psi\left(\mathfrak{x}, t - \frac{r}{c}\right)$, so nimmt obige Formel diese Gestalt an, wenn man durch eckige Klammern die Retardierung der Zeit t um $\frac{r}{c}$ andeutet:

$$\psi(\mathfrak{x}_0, t) = A \cdot \int_F \left\{ \left[\psi(\mathfrak{x}, t)\right] \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \cdot \left[\frac{\partial \psi(\mathfrak{x}, t)}{\partial \nu}\right] \right\} e^{i\frac{\omega r}{c}} \, df . \tag{15}$$

Da nun $\frac{r}{c}$ die Zeit bedeutet, die eine Welle zur Durchlaufung der Entfernung des Elementes df vom Aufpunkt P_0 benötigt, so kann, entsprechend der obigen Formel, die Erregung ψ in P_0 aufgefaßt werden als Überlagerung von Wellen, die von der Fläche F ihren Ausgang nehmen; die Verschiedenheit ihrer Phasen ist durch die Retardierung um den Betrag $\frac{r}{c}$ berücksichtigt. Ebenso könnte man eine Vordatierung um den Betrag $\frac{r}{c}$ durchführen; dies würde bedeuten, daß man die Zeit t durch $t + \frac{r}{c}$ ersetzt.

IV. Abschnitt

Das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip für beliebige Wellen

Wir haben gegen Ende des III. Abschnittes das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip auf den R_n verallgemeinert, wobei aber streng monochromatische Lösungen der Wellengleichung vorausgesetzt wurden. Wir wollen nun diese Einschränkung fallen lassen und uns fragen, ob das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip auch für beliebige, also nicht harmonische Erregungen $\psi(\mathfrak{x}, t)$ gilt? Darnach mögen uns also die Werte von $\psi(\overset{F}{\mathfrak{x}}, t)$ und $\frac{\partial \psi(\overset{F}{\mathfrak{x}}, t)}{\partial \nu}$ auf der Fläche F bekannt sein, wenn $\overset{F}{\mathfrak{x}}$ den Ortsvektor eines Punktes auf dieser bedeutet.

Wir werden nun unsere an sich beliebige Welle $\psi(\mathfrak{x}, t)$ im Intervall $[o, T]$ nach der Zeit t in eine Fourierreihe entwickeln:

$$\psi(\mathfrak{x}, t) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} a_s(\mathfrak{x}) \cdot e^{is\frac{2\pi}{T}t} \cdots a_s(\mathfrak{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\mathfrak{x}, t) \cdot e^{-is\frac{2\pi}{T}t} \cdot dt . \tag{16}$$

Die einzelnen Glieder der obigen Summe: $\psi_s(\mathfrak{x}, t) = a_s(\mathfrak{x}) \cdot e^{is\frac{2\pi}{T}t}$ stellen periodische Lösungen der Wellengleichung dar, so daß auf sie unser oben abgeleitetes Prinzip (15) angewendet werden darf, und kann, da sich infolge der Kenntnis von $\psi(\overset{F}{\mathfrak{x}}, t)$ und $\frac{\partial \psi(\overset{F}{\mathfrak{x}}, t)}{\partial \nu}$ auch $\psi_s(\overset{F}{\mathfrak{x}}, t)$ und $\frac{\partial \psi_s(\overset{F}{\mathfrak{x}}, t)}{\partial \nu}$ aus Formel (16) leicht bestimmen lassen. Entsprechend dem von uns für monochromatische Wellen abgeleiteten Huygens-Kirchhoffschen Prinzip (15) gilt somit:

$$\psi_s(\mathfrak{x}_0, t) = A_s \int_F \left\{ \left[\psi_s(\overset{F}{\mathfrak{x}}, t)\right] \cdot \frac{\partial v_s}{\partial \nu} - v_s \cdot \left[\frac{\partial \psi_s(\overset{F}{\mathfrak{x}}, t)}{\partial \nu}\right] \right\} e^{is\frac{2\pi}{T}r} \, df .$$

Dieses Integral ist berechenbar, da es in seinem Integranden lauter bekannte Größen enthält. Im Aufpunkt folgt dann für die Erregung:

$$\psi(\mathfrak{x}_0, t) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}{}' \psi_s(\mathfrak{x}_0, t) .$$

Die Erregung ψ einer beliebigen Welle läßt sich also im Punkt P_0 (mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}_0$) eindeutig aus den „Randwerten" bestimmen; sie kann aufgefaßt werden als Überlagerung von Wellen, die vom Element df der Begrenzungsfläche ausgehen, aber um die Zeit $\frac{r}{c}$ rückdatiert sind.

Genau so könnte man auch um diese Zeit $\frac{r}{c}$ vordatieren.

Man könnte die Funktion $\psi(\mathfrak{x}, t)$ auch durch ein Fourierintegral[1]) darstellen:

$$\psi(\mathfrak{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\mathfrak{x}, s) e^{its} ds \ldots a(\mathfrak{x}, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\mathfrak{x}, t) e^{-its} dt .$$

Dabei bildet der Integrand eine harmonische Lösung der Wellengleichung (1), so daß auf ihn die Formel (15) angewandt werden darf. Dann erhält man eben statt einer Summe der Flächenintegrale über F_0 das folgende Integral, wobei wiederum die eckigen Klammern die Retardierung um $\frac{r}{c}$ bedeuten.

$$\psi(\mathfrak{x}_0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds A(s) \int_F \left\{ \left[a(\mathfrak{x}, s) e^{its} \right] \frac{\partial v(r, s)}{\partial \nu} - v(r, s) \left[\frac{\partial a(\mathfrak{x}, s)}{\partial \nu} \cdot e^{its} \right] \right\} e^{is\frac{r}{c}} df .$$

V. Abschnitt

Das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip im R_1

Das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip im R_n $(n > 1)$ besteht nach obigem darin, daß durch Vorgabe der Erregung ψ und ihrer Ableitung $\frac{\partial \psi}{\partial \nu}$ auf einer $(n-1)$-dimensionalen Fläche, also einem R_{n-1}, die Werte der Funktion ψ in einem Punkt, also einem R_0, eindeutig bestimmt sind.

Im Falle $n = 1$, also im R_1, ist zu erwarten, daß durch Vorgabe von ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ in einem R_0, also in einem Punkt $x = a$, die Erregung auch in irgendeinem anderen beliebigen Punkte x festgelegt ist.

Die allgemeine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

hat die Gestalt:

$$\psi(x, t) = f(ct + x) + g(ct - x) . \qquad (17)$$

Sind also an der Stelle $x = a$ die Erregung $\psi(a, t)$ sowie $\left.\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}\right|_{x=a}$ als Funktionen der Zeit vorgegeben, so kann man unter Berücksichtigung von Gleichung (17) nach ganz einfachen Rechnungen zu folgender Darstellung von $\psi(x, t)$ kommen:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \psi\left(a, t - \frac{x-a}{c}\right) + \psi\left(a, t + \frac{x-a}{c}\right) + c \cdot \int_{t-\frac{x-a}{c}}^{t+\frac{x-a}{c}} \frac{\partial \psi(a, t')}{\partial x} dt' \right\} . \qquad (18)$$

Dabei bedeutet $\frac{x-a}{c}$ die Zeit, die eine Welle zum Durchlaufen des Abstandes der Punkte a und x benötigt.

Um also in einem Punkte x die Funktion $\psi(x, t)$ zu bestimmen, muß an der Stelle $x = a$ die Funktion ψ zur vor- und nachdatierten Zeit $t \mp \frac{x-a}{c}$ sowie $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ während des Zeitintervalles $\left[t - \frac{x-a}{c}, t + \frac{x-a}{c}\right]$ vorgegeben sein.

[1]) Die Konvergenzbedingungen werden als erfüllt angenommen.

Zusammenfassung

Es ist uns also gelungen, auf einem anderen Wege als V. Volterra das Huygens-Kirchhoffsche Prinzip auf beliebige Dimensionszahl zu verallgemeinern. Danach ist die Erregung ψ in einem Punkte P_0 eindeutig bestimmt durch die Werte von ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial \nu}$ auf einer $(n-1)$-dimensionalen Fläche F, die vollkommen beliebig ist, aber den Punkt P_0 einschließen muß; in dem von F berandeten Gebiet B muß ψ ausnahmslos die Wellengleichung befriedigen. Man kann die Erregung ψ im Aufpunkt P_0 auch auffassen als Überlagerung von Wellen, die von den Elementen df der Berandungsfläche F ausgehen, aber um die Zeit $\frac{r}{c}$ vor- oder nachdatiert sind, was der ursprünglichen Formulierung des Prinzips durch Huygens und Fresnel entspricht.

Graz, Institut für theoretische Physik der Universität.

(Eingegangen 22. April 1939)

BESPRECHUNGEN

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten

K. Bechert, Chr. Gerthsen, Atomphysik. I. Allgemeine Grundlagen. Sammlung Göschen Bd. 1009. 52 Abbildungen. II. Theorie des Atombaus. Sammlung Göschen Bd. 1123. 23 Abbildungen. Berlin 1938. Verlag W. de Gruyter & Co. Jeder Band RM. 1.62.

Die Grundlagen der Physik der Atomhülle sind seit etwa einem Jahrzehnt vollständig bekannt und wir haben gelernt, sie uns nicht nur in der Anordnung vorzustellen, in der sie historisch entstanden sind, sondern alle Querverbindungen zu sehen: man fängt heute an, die Physik der Atomhülle so gut zu kennen wie eine vertraute Stadt, in der man von jedem Punkt den kürzesten Weg zu jedem anderen Punkt weiß. Daher ist nun wohl auch der Zeitpunkt gekommen, um in Form von Göschen-Bändchen gleichsam den „Baedeker" oder den „Kleinen Grieben" dieser Stadt zu schreiben. Die beiden vorliegenden Bändchen stellen sich diese Aufgabe und erfüllen sie in ausgezeichneter Weise. Wie die Atomphysik selbst sind sie aus der innigen Zusammenarbeit des Experimentators und des Theoretikers hervorgegangen, und dazu zweier Autoren, welche didaktische Erfahrungen besitzen.

Der erste Band enthält die allgemeinen Grundlagen: die Grundtatsachen des Atomismus von Materie und Elektrizität, den Atombau, soweit er ohne eigentliche Atommechanik mit den beiden Bohrschen Postulaten beschrieben werden kann, und die Dualismusexperimente für Licht und Materie; dazu eine Tafel der Fundamentalkonstanten und ein in beiden Bänden abgedrucktes gemeinsames Register von sehr dankenswerter Ausführlichkeit. Die Darstellung ist knapp und reichhaltig, ihr Schwerpunkt liegt auf dem Experimentellen und Anschaulichen, ohne vor der mathematischen Theorie zurückzuschrecken, wo deren Anwendung sachlich geboten ist.

Der zweite Band ist durchaus theoretischer Natur. Er beginnt mit den Unschärferelationen und geht über die Bohrsche Theorie und das Korrespondenzprinzip mit einem Abriß der Matrizentheorie zur Wellenmechanik über, die im Grundsätzlichen bis zu einer qualitativen Darstellung der Diracschen Theorie des Elektrons, in den Anwendungen bis zur Theorie der Molekülspektren geführt wird. Schon diese Anordnung ist charakteristisch durch die Abweichung vom historischen Weg: Die Bohrsche Theorie erscheint als erste einfachste Kompromißlösung zwischen Korpuskel- und Wellenbild, in der sich das Korpuskelbild in den Bahnen, das Wellenbild in den Quantenbedingungen äußert. Die Klarheit des Gedankengangs, die dadurch erreicht wird, rechtfertigt diese Abweichung vollkommen. Die mathematischen Anforderungen an den Leser sind den Problemen angemessen, aber nicht übertrieben.

Ein kleiner Abänderungsvorschlag darf wohl gemacht werden: Seite 73, 1., ist gesagt, daß die Aktiniumreihe des radioaktiven Zerfalls wahrscheinlich eine Zweigreihe der Uran-Radiumreihe sei. Da die Muttersubstanz der Aktiniumreihe AcU zwar mit der Muttersubstanz der Uranreihe isotop, aber nicht ein Glied der Uranreihe ist, ist diese Bezeichnung vielleicht irreführend.

Alle, die sich in der Atomphysik einarbeiten wollen, werden den Verfassern und dem Verlag für diese Bändchen dankbar sein.

C. F. v. Weizsäcker

W. Blaschke, Ebene Kinematik. Eine Vorlesung (Hamburger Mathematische Einzelschriften, 25. Heft). Gr.-8°. IV u. 56 S. Mit 19 Fig. Leipzig und Berlin 1938. B. G. Teubner. Geh. RM 4.—; geb. RM 5.—.

Der Verfasser entwickelt eine von rein mathematischen Gesichtspunkten geleitete Formulierung der kinematischen Geometrie, in der die ebene Kinematik durch eine „kinematische Abbildung" zu einer „quasielliptischen Geometrie" in Beziehung gesetzt wird. Dabei ergeben sich viele reizvolle Einzelheiten, die in anregender Darstellung gewonnen bzw. in geschickter Auswahl dem Leser als Übungsaufgaben überlassen werden.

Harry Schmidt

Bernd Eistert, Tautomerie und Mesomerie. Sammlung chemischer und chemisch-technischer Vorträge. Herausgegeben von Professor Dr. R. Pummerer, N. F. Heft 40. 204 Seiten. 2 Abbildungen. Stuttgart W 1938. Ferdinand Enke. Geheftet RM 14.—.

Unter Tautomerie versteht der Chemiker die Erscheinung einer innermolekularen Umlagerung, die in einer Verschiebung eines locker gebundenen Atoms, meist Wasserstoff, und einer gleichzeitigen Umordnung einiger Elektronenpaare besteht und die zu einem Gleichgewicht oft wohl definierter chemischer Verbindungen führt. Bei der Mesomerie dagegen bleibt die Lage der Atomkerne zueinander in jedem Falle erhalten, ein Unterschied besteht nur infolge Verschiedenheiten von Ladungen und Bindungen. Der Verfasser hat sich zur Aufgabe gestellt, — nach einer notwendigen gründlichen Festlegung dieser Begriffe — zunächst eine Formulierungsart für die Konstitution auszuarbeiten und hier durchzuführen, die über die Schwächen aller bisherigen Elektronenformeln hinaus der Elektronenverteilung im Molekül auch für die Fälle, in denen Tautomerie oder Mesomerie auftritt, Rechnung tragen soll. Nach Ansicht des Referenten muß es dahingestellt bleiben, ob dem Verfasser dabei der an sich verdiente Erfolg beschieden sein wird; denn der Chemiker hat sich längst daran gewöhnt, daß es auch für den einfachsten Körper keine Formulierung gibt, die es gestattet, seine Eigenschaften abzulesen oder sein Verhalten vorauszusagen. Und der Physiker betrachtet das Molekül noch mehr von einem Standpunkt, bei dem ihn ein qualitatives Formelsymbol wenn auch nicht zu stören, so doch mindestens nicht zu fördern vermag. Der große Wert des Buches beruht vielmehr in der sorgfältigen und glücklichen Auswahl von Einzelfällen aus allen Gebieten der organischen Chemie, in denen „Elektromerie" eine Rolle spielt. Durch die Verwendung dieser Begriffe wird nicht nur der Chemiker, für den das Buch ja eigentlich geschrieben ist, viele Vorgänge neu verstehen lernen, sondern auch der Physiker wird erkennen, wie die Probleme liegen und wo seine Arbeit einzusetzen hat. Als sehr aufschlußreich und anregend muß auch der — allerdings nicht erschöpfende — Abschnitt über die Wasserstoffbindung, ferner auch das letzte Kapitel über Konstitution und Farbe genannt werden.

Rogowski

Nachtrag zum Vorlesungsverzeichnis für das Sommerhalbjahr 1939

Universität Graz. **Rumpf:** Einführung in die Experimentalphysik II: Elektrizität und Magnetismus, Radioaktivität, 3, Ergänzungen, 2; Physikalische Übungen für Anfänger I (mit Priebsch), 4, II, 6; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Besprechung physikalischer Fragen (mit Székely und Priebsch), 1. — **N. N.:** Vorlesungen über theoretische Physik, 5, Seminar, 2. — **Székely:** Die Erzeugung kurzer elektrischer Wellen, 1. — **Priebsch:** Ausgewählte Kapitel aus der Wehrphysik, 1. — **Leitinger:** Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche, 3. —

NACHRICHTEN

Das Oberkommando der Kriegsmarine gibt wie in den vergangenen Jahren den Teil „Zeitsignale" des soeben erschienenen „Nautischen Funkdienstes 1939" (in Vertrieb bei E. S. Mittler und Sohn, Berlin SW 68, Kochstraße 68—71) als Sonderdruck zum Preise von RM 1.— heraus.

Mit dieser jährlich neu erscheinenden amtlichen Zusammenstellung aller Funkzeitsignale wird dem Bedürfnis der an Zeitzeichen besonders interessierten Kreise Rechnung getragen.

Dozenturen: Dr. Karl Ernst Stumpf an der Universität Greifswald für präparative anorganische Chemie, Dr. Ulrich Stille an der Technischen Hochschule Braunschweig für theoretische Physik und Theorie der Elektrizität, an der Universität Heidelberg Dr. Wilhelm Maak für Mathematik, Dr.-Ing. Erwin Kübler in Berlin-Siemensstadt an der Technischen Hochschule Breslau für Elektromaschinenbau, an der Universität Hamburg Regierungsrat bei der Deutschen Seewarte Dr. Wilhelm Semmelhack für koloniale Klimatologie, an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Wilhelm Fischer für Elektrowärme, an der Technischen Hochschule Darmstadt Ministerialrat Dr. Heinrich Müller für Kartenkunde und Reproduktionstechnik, an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Harald Volkmann für technische Optik.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Basel Dr. Robert Flatt jun. zum a. o. Professor für analytische, angewandte und technische Chemie an der Universität Bern, der a. o. Professor an der Universität Bern Dr. Rudolf Signer zum ord. Professor an derselben Hochschule, der Lehrbeauftragte für Kunststoffe an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Wilhelm Röhrs zum Honorarprofessor an derselben Hochschule, der wissenschaftliche Angestellte an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Fritz Möller zum Observator beim Institut für Meteorologie daselbst, der nichtplanmäßige Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Hans Wolfgang Kohlschütter zum planmäßigen Professor für anorganische und analytische Chemie an der gleichen Hochschule, der Dozent Dr.-Ing. Wilhelm Bader in Berlin zum ord. Professor für theoretische Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Stuttgart, der Dozent für organische Chemie an der Universität Posen Dr. Aleksander Nowakowski zum ord. Professor der chemischen Technologie an der Stefan-Batory-Universität in Wilna, der ord. Professor für physikalische Chemie an der Universität Kiel Dr. Werner Kuhn in gleicher Eigenschaft an der Universität Basel.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Otto Eggert.

Gestorben: Der Abteilungsleiter an der Chemischen Untersuchungsanstalt Erlangen Regierungschemierat Dr. Eugen Schowalter.

Verantwortlicher Schriftleiter: Professor Dr. Dr. h. c. P. Debye, Berlin. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1, Königstr. 2. — Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig. — D. A. 1330. I. Vj. 1939. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. — Printed in Germany.